Evaluación de la calidad educativa de la provincia de Buenos Aires

Tercera serie de documentos

Matemática 9º año

3

Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula

Tres dimensiones para cuatro ejes

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires
Dirección Provincial de Planeamiento y Evaluación de la Calidad Educativa

Tercera serie de documentos

Matemática

9º año

3

Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula

Tres dimensiones para cuatro ejes

Director General de Cultura y Educación
de la Provincia de Buenos Aires
Mario N. Oporto

Directora Provincial de Planeamiento y
Evaluación de la Calidad Educativa
María del Carmen Feijoó

Directora del Programa de Evaluación
de la Calidad Educativa
Graciela Gil

Subdirectora de Coordinación Operativa
Martha S. Spotti

Responsable del texto
Omar Malet

Equipo Técnico de Matemática
Omar Malet (coordinador)
Liliana Pujadas - Graciela Padula

Edición
Laura Malena Kornfeld

Diseño gráfico
Juan Livingston - Martín Rossi
Andrea Fudim

Introducción

El propósito de este documento es articular reflexiones y conceptualizaciones en torno a las pruebas de Matemática de Noveno Año.

Como se recordará, las pruebas del Área se estructuran simultáneamente alrededor de cuatro ejes (Números y Operaciones, Nociones geométricas, Mediciones, Nociones de Estadística y Probabilidad) y de tres dimensiones (Estructuras conceptuales, Procesos cognitivos, Procedimientos de trabajo). Además, para cada uno de los ejes se han definido temas prioritarios que orientan la distribución temática de los ítems en los instrumentos.

La construcción del documento toma en consideración esa misma estructura.

En efecto, para cada uno de los cuatro ejes:

- En primer lugar, se parte de elegir uno de sus temas prioritarios.

  En todos los casos, la elección recae sobre uno de los temas que los resultados de anteriores aplicaciones de las pruebas, las demandas de los profesores y la propia experiencia docente del Equipo del Área sugieren como más problemáticos (por su dificultad conceptual o procedimental, por el desafío que suponen para la enseñanza, por su novedad en los niveles básicos de la educación, etc.).

- En segundo lugar, se ejemplifica la presencia del tema en las pruebas mostrando y comentando ítems correspondientes a cada una de las tres dimensiones.

  Las dimensiones que contemplan las pruebas procuran reflejar y recoger diferenciadamente los aportes que la educación matemática proporciona (o sería deseable que proporcionara) a la formación de los alumnos.

  En función de la dimensión en la que se lo inscribe, el mismo tema admite presentaciones diferentes y requiere habilidades de respuesta consecuentemente distintas de parte del alumno –todas ellas, importantes–.

  Confiamos en que ejemplificar esta situación por medio de ítems de las propias pruebas puede sugerir caminos posibles orientados a no descuidar ninguna de esas dimensiones en el aula.

- En tercer lugar, se inscribe el tema en un marco de referencia didáctico.

  De este modo, el tema elegido actúa como disparador de la reflexión didáctica, que puede ser útil para revisar críticamente los procesos de enseñanza y aprendizaje correspondientes.

  Sin embargo, vale la pena aclarar que este criterio apunta a organizar la exposición, y que no impone falsas restricciones: el lector comprobará rápidamente que la reflexión didáctica desarrollada a propósito de un tema particular es fácilmente trasladable a otros temas (de los que aborda el documento, de los que contemplan las pruebas, de los que se trabajan en el aula...).

En principio, los destinatarios del documento son los docentes de Noveno Año. De hecho, muchas de las cuestiones que se abordan están específicamente ligadas a ese curso.

No obstante, dos razones parecen autorizar a proponer la lectura conjunta (total, o, al menos, parcial) con los demás docentes del Área del Tercer Ciclo (y hasta con docentes de Primero y Segundo Ciclos):

- Por un lado, las pruebas son aplicadas hacia mediados del año calendario en que los alumnos evaluados cursan Noveno Año, por lo que se orientan a evaluar competencias que se desarrollan fundamentalmente durante los años precedentes; en consecuencia, las reflexiones del documento, que se derivan de las pruebas, también pueden ser útiles para los docentes de esos años, y no sólo para los de Noveno Año.
- Por otro lado, los aprendizajes de los alumnos tienen un pasado, un presente y un futuro institucional, por lo que los procesos de transformación y mejora, a los que el documento pretende aportar, comprometen a toda la institución, y no sólo a quienes puntualmente están a cargo de los cursos evaluados.

En otras palabras, algunas de las propuestas del documento admiten una doble lectura y tienen una doble finalidad: pueden ser remediales para el trabajo con los alumnos de Noveno Año (esto es, pueden contribuir a superar dificultades existentes), y a la vez preventivas para el trabajo con alumnos de los cursos previos (o sea, contribuir a prevenir dificultades futuras).

A modo de mapa que permite anticipar el itinerario propuesto y no perderlo de vista, o definir un itinerario personal de lectura, he aquí esta tabla:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">9º año</th><th colspan="3">DIMENSIONES</th></tr>
<tr><th>Estructuras conceptuales</th><th>Procesos cognitivos</th><th>Procedimientos de trabajo</th></tr>
<tr><td rowspan="4">EJES</td><td>Números y Operaciones</td><td colspan="3">La proporcionalidad:
✓ Tres dimensiones para la proporcionalidad
✓ Proporcionalidad y crecimiento funcional: llamando la atención sobre pistas falsas...
✓ El formato de gráficos y fórmulas como indicador de proporcionalidad
✓ El lenguaje de las fórmulas: las letras en álgebra</td></tr>
<tr><td>Nociones geométricas</td><td colspan="3">Las transformaciones geométricas:
✓ Tres dimensiones para las transformaciones geométricas
✓ El cubo de las transformaciones: una herramienta para elaborar secuencias didácticas
✓ De teselas y mosaicos
✓ Un modelo de desarrollo del razonamiento geométrico: los niveles de Van Hiele</td></tr>
<tr><td>Mediciones</td><td colspan="3">Perímetro, área, volumen:
✓ Tres dimensiones para la medición de perímetros, áreas y volúmenes
✓ Dificultades y errores en el medir: una lectura didáctica
✓ Enseñando a medir: una progresión posible. De la estimación sensorial a la aritmetización de la medida
✓ Capacidad y volumen, ¿dos conceptos en conflicto?</td></tr>
<tr><td>Nociones de Estadística y Probabilidad</td><td colspan="3">La estadística:
✓ Tres dimensiones para la estadística
✓ Variables didácticas en la construcción y lectura de tablas y gráficos estadísticos
✓ En torno al concepto de media aritmética</td></tr>
</table>

Números y operaciones. La proporcionalidad

Tres dimensiones para la proporcionalidad

A continuación, analizamos tres ítems que hacen intervenir a la proporcionalidad desde las distintas dimensiones que las pruebas contemplan.

3

Los directivos de una escuela calcularon que los días de lluvia faltan a clase alrededor de las $\frac{2}{5}$ partes del alumnado. ¿Cuál es el porcentaje de inasistencia?

- El 0,4 % ◯ 1
- El 4 % ◯ 2
- El 40 % ◯ 3
- El dato disponible no permite averiguarlo. ◯ 4

Este ítem evalúa si el alumno es capaz de interpretar una fracción en términos porcentuales, en el contexto de una situación concreta.

Pertenece al eje Números y Operaciones, y a la dimensión Estructuras conceptuales.

Implica expresar una fracción (2/5) como porcentaje (40 %).

¿Cómo interviene la proporcionalidad en la conversión de la fracción a porcentaje?

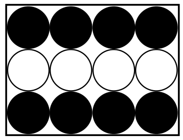
A la fracción 2/5 le subyace una relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de alumnos que faltan a clase los días de lluvia y la cantidad total de alumnos de la escuela: cuando llueve, faltan 2 alumnos de cada 5.

Preguntar por el porcentaje de inasistencia equivale a hacerlo por cuántos alumnos faltan cada 100; obviamente, decir que faltan 2 de cada 5 equivale a decir que faltan 4 de cada 10, o 20 de cada 50, y, en definitiva, 40 de cada 100; es decir, el 40 %.

Una resolución alternativa: la fracción 2/5 se puede expresar como 0,4; este número decimal se puede interpretar en términos de "0,4 cada 1" (aunque en este caso la interpretación resulta forzada por el carácter discreto del conjunto de referencia: la cantidad de alumnos se cuenta, es decir, se cuantifica mediante números naturales; es más claro pensar, por ejemplo, en un descuento de $ 2 cada $ 5: el descuento es de 40 centavos ($ 0,4) cada $ 1). Y 0,4 cada 1 es lo mismo que 4 cada 10 y que 40 cada 100.

5

Con respecto a esta caja de 12 alfajores, en la cual los alfajores blancos son de dulce de leche, y los alfajores negros son de chocolate, tres chicas dicen:
Ana: “Por cada dos alfajores de chocolate hay uno de dulce de leche”.
Sofía: “La cantidad de alfajores de dulce de leche es la mitad de la de chocolate”.
Juana: “La cantidad de alfajores de dulce de leche es la tercera parte del total de alfajores de la caja”.
¿Cuántas de las chicas tienen razón?



- Ninguna. ◯ 1
- Sólo una. ◯ 2
- Sólo dos. ◯ 3
- Las tres. ◯ 4

Este ítem evalúa si el alumno es capaz de establecer relaciones cuantitativas parte / parte y parte / todo, y verificar equivalencias por traducción entre los lenguajes coloquial y gráfico.

Pertenece al eje Números y Operaciones, y a la dimensión Procesos cognitivos.

Reconocer como correctas las afirmaciones de Ana, Sofía y Juana supone establecer dos relaciones de proporcionalidad directa:

- La cantidad de alfajores de chocolate es directamente proporcional a la de alfajores de dulce de leche.

  En la caja, por cada 8 alfajores de chocolate hay 4 de dulce de leche, lo que equivale a que por cada 2 alfajores de chocolate hay 1 de dulce de leche (como dice Ana) y a que la cantidad de alfajores de dulce de leche es la mitad de la de chocolate (como dice Sofía).

- La cantidad de alfajores de dulce de leche es directamente proporcional a la cantidad total de alfajores en la caja.

  Por cada 12 alfajores que hay en la caja, 4 son de dulce de leche; o, lo que es lo mismo, por cada 3 alfajores que hay en la caja, 1 es de dulce de leche (en palabras de Juana: la cantidad de alfajores de dulce de leche es la tercera parte del total de alfajores de la caja).

9

El medidor de combustible de un auto indica $\frac{1}{3}$ de tanque. Para llenar los $\frac{2}{3}$ que faltan es necesario cargar 40 litros de nafta.
¿Cuál de los siguientes procedimientos permite averiguar la capacidad total del tanque?

- Multiplicar 40 por 3. ◯ 1
- Dividir 40 por 3, y al resultado sumarle 40. ◯ 2
- Multiplicar 40 por 2, y dividir el resultado por 3. ◯ 3
- Dividir 40 por 2, y al resultado sumarle 40. ◯ 4

Este ítem evalúa si el alumno es capaz de seleccionar un procedimiento de cálculo adecuado para averiguar el valor de una incógnita correspondiente a un todo unitario, en una situación concreta en la que intervienen números enteros y fracciones relativos a partes de ese todo.

Se inscribe en el eje Números y Operaciones, y en la dimensión Procedimientos de trabajo.

Le subyace una relación de proporcionalidad directa entre el espacio (ocupado o vacío) del tanque y la cantidad de litros de nafta que llena o que puede llenar ese espacio.

El procedimiento que permite averiguar la capacidad del tanque (procedimiento 4) se basa en propiedades características de las relaciones de proporcionalidad directa.

2/3 de tanque se llenan con 40 litros de nafta. Dividiendo ambas cantidades (2/3 y 40) por 2, se averigua la cantidad de litros de nafta correspondiente a 1/3 de tanque:

2/3 : 2

2/3	1/3
40	20

40 : 2

Si 40 litros de nafta llenan 2/3 de tanque, y 20 litros (el resultado obtenido) llenan 1/3 de tanque, sumando 40 + 20 se obtiene la capacidad total del tanque, ya que 2/3 + 1/3 = 3/3:

+

2/3	1/3	3/3
40	20	60

+

Los tres ítems que hemos comentado nos dan pie para reflexionar acerca de las relaciones de proporcionalidad.

Para ello, le proponemos resolver una serie de situaciones.

Situación 1

a) Dibuje cinco triángulos rectángulos, bajo las siguientes condiciones:

- Uno de los catetos de cada triángulo debe tener una longitud de 4 cm
- Todos los triángulos deben ser diferentes entre sí

b) Numere los triángulos del “1” al “5”, para identificarlos.

c) Complete la siguiente tabla:

Triángulo N°	1	2	3	4	5
Longitud del cateto que no es dato (**L**, en cm)					
Área (**A**, en cm^2)					

d) Construya el gráfico cartesiano de la relación entre **L** y **A** (represente los valores de **L** sobre el eje de abscisas y los valores de **A** sobre el eje de ordenadas).

e) Según la tabla, ¿qué cuenta hay que hacer con **L** para obtener **A**? Exprese dicha cuenta por medio de una fórmula.

Situación 2

La secretaria de una empresa cobra mensualmente un sueldo básico de $ 650, y un plus de $ 7 por cada hora extra que cumple.

a) Complete la siguiente tabla:

Cantidad de horas extra cumplidas durante el mes (**c**)	0	5	10	15	20
Sueldo a percibir (**S**, en $)					

b) Construya el gráfico cartesiano de la relación entre **c** y **S** (represente los valores de **c** sobre el eje de abscisas y los valores de **S** sobre el eje de ordenadas).

c) Según la tabla, ¿qué cuenta hay que hacer con **c** para obtener **S**? Exprese dicha cuenta por medio de una fórmula.

Situación 3

A las cinco de la tarde, la temperatura en una región desértica es de 35 º C; en ese instante, comienza a descender a razón de 5 º C por hora, hasta alcanzar los 10 º C bajo cero. Se considera como "hora cero" a la medianoche; se consideran negativos los instantes anteriores a ese momento, y positivos los instantes posteriores.

a) Complete la siguiente tabla:

Horario (**t**, en h)							0		
Temperatura (**T**, en °C)	35								-10

b) Construya el gráfico cartesiano de la relación entre **t** y **T** (represente los valores de **t** sobre el eje de abscisas y los valores de **T** sobre el eje de ordenadas).

c) Según la tabla, ¿qué cuenta hay que hacer con **t** para obtener **T**? Exprese dicha cuenta por medio de una fórmula.

Situación 4

a) Dibuje cinco triángulos rectángulos, bajo las siguientes condiciones:

- Cada triángulo debe tener un área de 18 cm^2
- Todos los triángulos deben ser diferentes entre sí

b) Numere los triángulos del “1” al “5”, para identificarlos.

c) Complete la siguiente tabla:

Triángulo N°	1	2	3	4	5
Longitud de uno de los catetos (**l**, en cm)					
Longitud del otro cateto (**L**, en cm)					

d) Construya el gráfico cartesiano de la relación entre **l** y **L** (represente los valores de **l** sobre el eje de abscisas y los valores de **L** sobre el eje de ordenadas).

e) Según la tabla, ¿qué cuenta hay que hacer con **l** para obtener **L**? Exprese dicha cuenta por medio de una fórmula.

Situación 5

a) Dibuje cinco prismas rectos de base cuadrada, bajo las siguientes condiciones:

- En cada prisma, la suma de las longitudes de las aristas que concurren en un vértice debe ser 12 cm
- Todos los prismas deben ser diferentes entre sí

b) Numere los prismas del "1" al "5", para identificarlos.

c) Complete la siguiente tabla:

Prisma N°	1	2	3	4	5
Longitud de uno de los lados de la base (**l**, en cm)					
Longitud de la altura (**h**, en cm)					

d) Construya el gráfico cartesiano de la relación entre **l** y **h** (represente los valores de **l** sobre el eje de abscisas y los valores de **h** sobre el eje de ordenadas).

e) Según la tabla, ¿qué cuenta hay que hacer con **l** para obtener **h**? Exprese dicha cuenta por medio de una fórmula.

Situación 6

Un sumergible emerge lentamente del mar entre la 1 y las 4 de la tarde, y lo hace de manera tal que multiplicando su posición **p** (en metros, respecto del nivel del mar) por la hora **t** a la cual se encuentra en dicha posición, se obtiene como resultado - 300. Por ejemplo, a las 2 de la tarde el sumergible se halla a 150 metros de profundidad (- 150 m), ya que (- 150) . 2 = - 300.

a) Complete la siguiente tabla:

Tiempo (**t**, en h)	1	2	3	4
Posición del sumergible (**p**, en m respecto del nivel del mar)		-150		

b) Construya el gráfico cartesiano de la relación entre **t** y **p** (represente los valores de **t** sobre el eje de abscisas y los valores de **p** sobre el eje de ordenadas).

c) Explicite la fórmula que permite obtener **p** a partir de **t**.

Respuestas

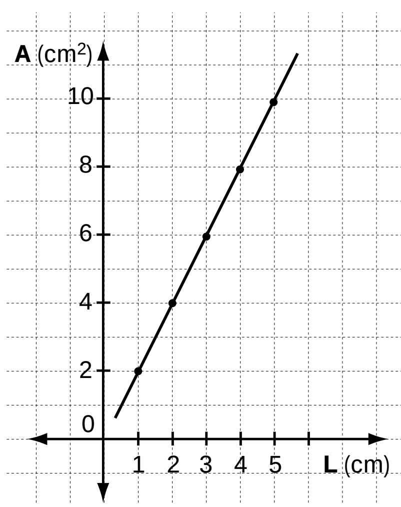
He aquí las respuestas (en las Situaciones 1, 4 y 5 hay otras alternativas de completamiento de las tablas correspondientes):

Situación 1

c) Una alternativa de completamiento de la tabla es:

Triángulo N°	1	2	3	4	5
Longitud del cateto que no es dato (**L**, en cm)	1	2	3	4	5
Área (**A**, en cm^2)	2	4	6	8	10

d) El gráfico cartesiano de la relación entre **L** y **A** es:



e) La fórmula que expresa qué cuenta hay que hacer con **L** para obtener **A** es:

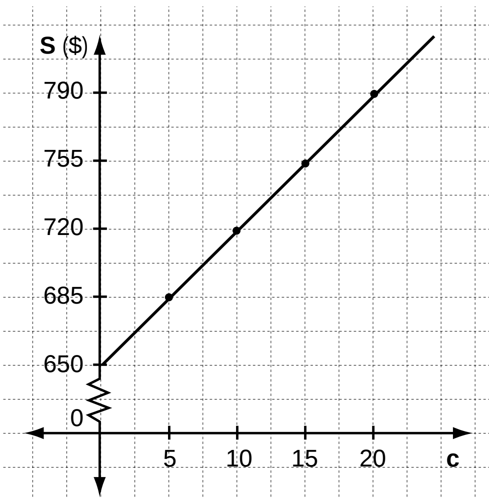
$$\mathbf{A} = 2 \,.\, \mathbf{L}$$

Situación 2

a) La tabla completa es:

Cantidad de horas extra cumplidas durante el mes (**c**)	0	5	10	15	20
Sueldo a percibir (**S**, en $)	650	685	720	755	790

b) El gráfico cartesiano de la relación entre **c** y **S** es:



c) La fórmula que expresa qué cuenta hay que hacer con **c** para obtener **S** es:

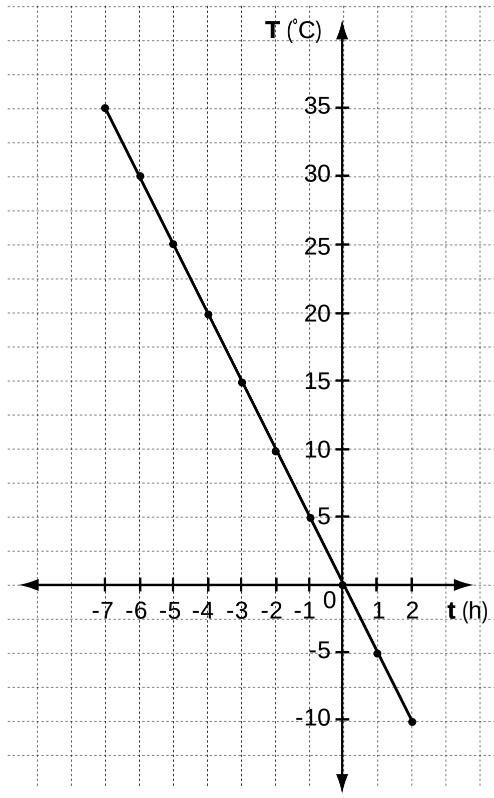
$$\mathbf{S} = 7 \cdot \mathbf{c} + 650$$

Situación 3

a) La tabla completa es:

Horario (**t**, en h)	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Temperatura (**T**, en °C)	35	30	25	20	15	10	5	0	-5	-10

b) El gráfico cartesiano de la relación entre **t** y **T** es:



c) La fórmula que expresa qué cuenta hay que hacer con **t** para obtener **T** es:

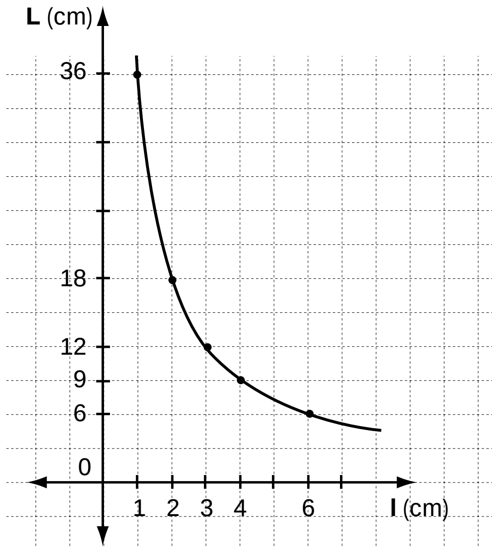
T = (- 5) . **t**

Situación 4

c) Una alternativa de completamiento de la tabla es:

Triángulo N°	1	2	3	4	5
Longitud de uno de los catetos (**l**, en cm)	1	2	3	4	6
Longitud del otro cateto (**L**, en cm)	36	18	12	9	6

d) El gráfico cartesiano de la relación entre **l** y **L** es:



e) La fórmula que expresa qué cuenta hay que hacer con **l** para obtener **L** es:

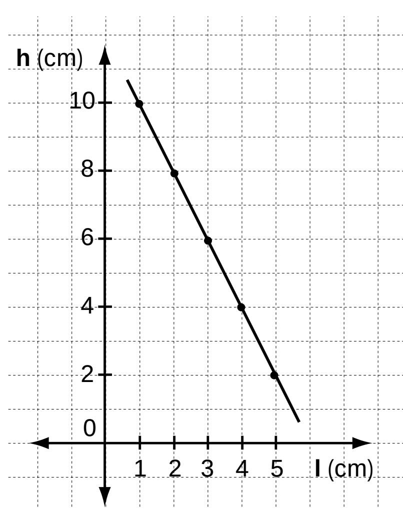
L = 36 / **l**

Situación 5

c) Una alternativa de completamiento de la tabla es:

Prisma N°	1	2	3	4	5
Longitud de uno de los lados de la base (**l**, en cm)	1	2	3	4	5
Longitud de la altura (**h**, en cm)	10	8	6	4	2

d) El gráfico cartesiano de la relación entre **l** y **h** es:



e) La fórmula que expresa qué cuenta hay que hacer con **l** para obtener **h** es:

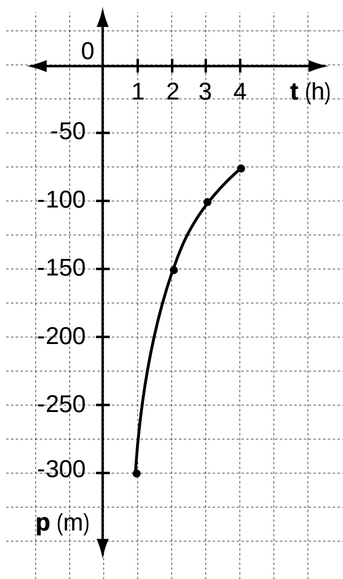
$$\mathbf{h} = (-2) \cdot \mathbf{l} + 12$$

Situación 6

a) La tabla completa es:

Tiempo (**t**, en h)	1	2	3	4
Posición del sumergible (**p**, en m respecto del nivel del mar)	-300	-150	-100	-75

b) El gráfico cartesiano de la relación entre **t** y **p** es:



c) La fórmula que permite obtener **p** a partir de **t** es:

$$\mathbf{p} = -300 / \mathbf{t}$$

Proporcionalidad y crecimiento funcional: Ilamando la atención sobre pistas falsas...

¿A cuál o cuáles de estas situaciones les subyacen relaciones de proporcionalidad directa? ¿Y de proporcionalidad inversa?

Un error común es caracterizar las relaciones de proporcionalidad directa en términos de que en ellas cuando aumentan las cantidades de una de las magnitudes, también aumentan las de la otra, y recíprocamente: cuando disminuyen las cantidades de una de las magnitudes, disminuyen las de la otra ("a más, más; y a menos, menos").

Esta caracterización errónea conduce a clasificar como de proporcionalidad directa tanto la Situación 1 como las Situaciones 2 y 6. En la Situación 1, cuanto mayor es el cateto del triángulo rectángulo, mayor es el área de éste. En la Situación 2, cuanto mayor es la cantidad de horas extra cumplidas durante el mes por la secretaria, mayor es el sueldo percibido. En la Situación 6, el sumergible sube a medida que transcurre el tiempo.

De la misma manera, se suelen describir –incorrectamente– las relaciones de proporcionalidad inversa como aquellas en las cuales cuando aumentan las cantidades de una de las magnitudes, disminuyen las de la otra, y recíprocamente: cuando disminuyen las cantidades de una de las magnitudes, aumentan las de la otra ("a más, menos; y a menos, más").

Si así fuera, las Situaciones 3, 4 y 5 serían todas de proporcionalidad inversa. En la Situación 3, a medida que transcurre el tiempo la temperatura disminuye. En la Situación 4, a medida que aumenta la longitud de uno de los catetos del triángulo rectángulo, disminuye la del otro cateto. En la Situación 5, a medida que aumenta la longitud del lado de la base del prisma, disminuye la de la altura.

Sin embargo, sólo la Situación 1 y la Situación 3 son de proporcionalidad directa; sólo la Situación 4 y la Situación 6 son de proporcionalidad inversa; en cuanto a la Situación 2 y la Situación 5, no son de proporcionalidad, ni directa ni inversa.

En síntesis:

	Clasificación según caracterización incorrecta			**Clasificación según caracterización correcta**		
	Proporcionalidad directa	Proporcionalidad inversa	No proporcionalidad	Proporcionalidad directa	Proporcionalidad inversa	No proporcionalidad
Situación 1	X			X		
Situación 2	X					X
Situación 3		X		X		
Situación 4		X			X	
Situación 5		X				X
Situación 6	X				X	

¿Por qué, las discrepancias que muestra el cuadro? Porque las caracterizaciones "a más, más, y a menos, menos", y "a más, menos, y a menos, más" no se ajustan a las definiciones formales de proporcionalidad.

Una relación de proporcionalidad directa es aquella en la cual una cantidad cualquiera de la segunda magnitud se obtiene multiplicando un valor constante por la cantidad correspondiente de la primera magnitud.

Volvamos a la tabla de la Situación 1:

Triángulo N°	1	2	3	4	5
Longitud del cateto que no es dato (**L**, en cm)	1	2	3	4	5
Área (**A**, en cm^2)	2=2.1	4=2.2	6=2.3	8=2.4	10=2.5

En este caso, las sucesivas áreas se obtienen multiplicando por la constante 2 las longitudes correspondientes del cateto que no es dato (esa constante es la mitad de la longitud en centímetros del cateto dato).

En la Situación 3:

Horario (**t**, en h)	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
Temperatura (**T**, en °C)	35 = (-5).(-7)	30 = (-5).(-6)	25 = (-5).(-5)	20 = (-5).(-4)	15 = (-5).(-3)	10 = (-5).(-2)	5 = (-5).(-1)	0 = (-5).0	-5 = (-5).1	-10 = (-5).2

En este caso, las sucesivas temperaturas se obtienen multiplicando por la constante - 5 los valores correspondientes de tiempo (esa constante indica la velocidad con la que desciende la temperatura).

Una relación de proporcionalidad inversa es aquella en la cual una cantidad cualquiera de la segunda magnitud se obtiene dividiendo un valor constante por la cantidad correspondiente de la primera magnitud.

En la Situación 4:

Triángulo N°	1	2	3	4	5
Longitud de uno de los catetos (**l**, en cm)	1	2	3	4	6
Longitud del otro cateto (**L**, en cm)	36= 36:1	18= 36:2	12= 36:3	9= 36:4	6= 36:6

La constante 36 es en este caso el duplo del área del triángulo rectángulo en cm^2.

En la Situación 6:

Tiempo (**t**, en h)	1	2	3	4
Posición del sumergible (**p**, en m respecto del nivel del mar)	-300 = (-300):1	-150 = (-300):2	-100 = (-300):3	-75 = (-300):4

Por lo tanto: los criterios de "a más, más; a menos, menos" y "a más, menos; a menos, más" para reconocer relaciones de proporcionalidad directa e inversa, respectivamente, son falsos: conducen a identificar como de proporcionalidad directa situaciones que son de proporcionalidad inversa (Situación 6) o que no son de proporcionalidad (Situación 2), y como de proporcionalidad inversa situaciones que son de proporcionalidad directa (Situación 3) o que no son de proporcionalidad (Situación 5).

Matemáticamente, esos criterios describen el crecimiento o decrecimiento de una función en sentido estricto.

Una función f *es estrictamente creciente en un conjunto incluido en su dominio si y sólo si en ese conjunto* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$*; es decir: si al aumentar los valores de* x *aumentan también los de sus imágenes* $f(x)$ *("a más, más; a menos, menos").*

Una función f *es estrictamente decreciente en un conjunto incluido en su dominio si y sólo si en ese conjunto* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$*; es decir: si al aumentar los valores de* x *disminuyen los de sus imágenes* $f(x)$ *("a más, menos; a menos, más").*

La confusión entre "proporcionalidad" y "crecimiento" se monta sobre dos suposiciones:

a) Que todo crecimiento o decrecimiento es crecimiento o decrecimiento proporcional.

Esta suposición es falsa. Por ejemplo:

- La Situación 2 se puede modelar mediante una función estrictamente creciente, y sin embargo es una situación en la que no hay proporcionalidad entre las variables en juego.
- La Situación 5 se puede modelar mediante una función estrictamente decreciente, y también es una situación de no proporcionalidad.

b) Que toda función de proporcionalidad directa es estrictamente creciente, y que toda función de proporcionalidad inversa es estrictamente decreciente.

Esta segunda suposición también es falsa. Por ejemplo:

- La Situación 3 responde a una función de proporcionalidad directa estrictamente decreciente.
- La Situación 6 responde a una función de proporcionalidad inversa estrictamente creciente.

En síntesis: la proporcionalidad y el crecimiento son dos categorías independientes aplicables al análisis de una función, y no se pueden reducir una a la otra.

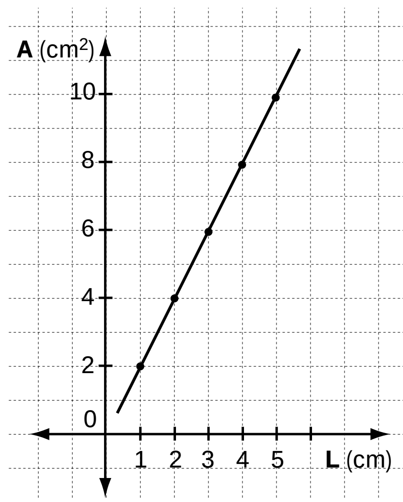
El formato de gráficos y fórmulas como indicador de proporcionalidad

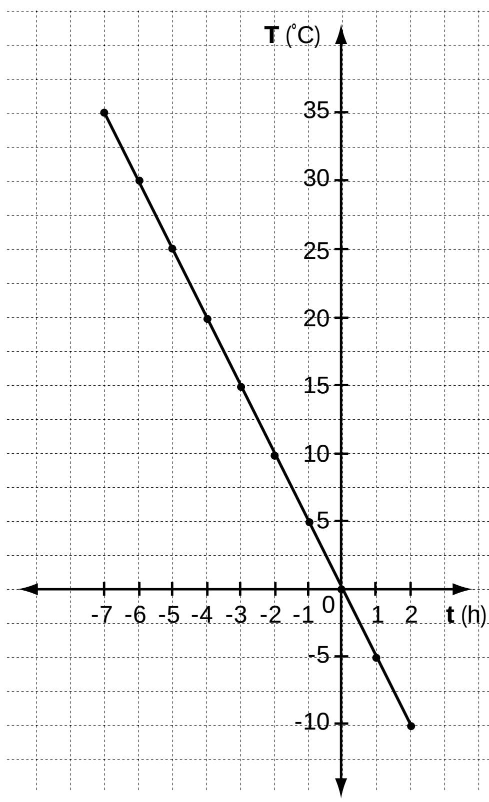
En el apartado anterior mostramos por qué los criterios de “a más, más; a menos, menos” y “a más, menos; a menos, más” resultan inadecuados para reconocer relaciones de proporcionalidad.

En este apartado identificaremos dos indicadores "confiables" de proporcionalidad: la forma de los gráficos y el formato de las fórmulas correspondientes.

Las Situaciones 1 y 3 son situaciones en las que existen relaciones de proporcionalidad directa entre las variables que intervienen.

Observemos sus gráficos cartesianos:





Ambos gráficos son segmentos de rectas (no verticales ni horizontales) que pasan por el origen de coordenadas.

Observemos las fórmulas de las Situaciones 1 y 3:

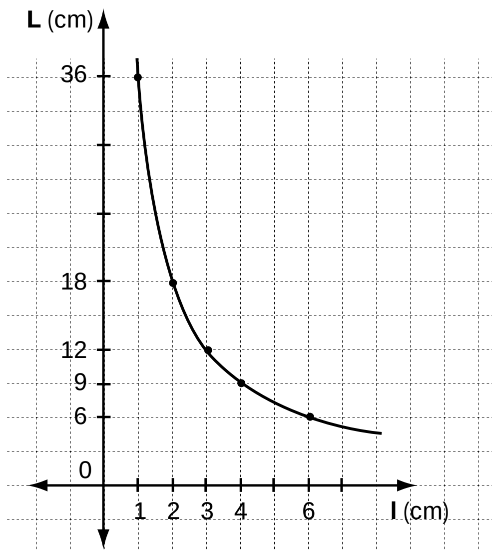
- Para la Situación 1: **A** = 2 . **L**
- Para la Situación 3: **T** = (- 5) . **t**

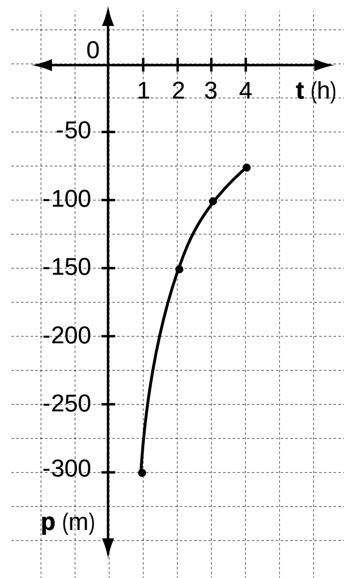
Ambas fórmulas indican que los valores de una de las variables (**A**, **T**) se obtienen multiplicando un número (2, -5) por los valores correspondientes de la otra variable (**L**, **t**).

Estas características de los gráficos y las fórmulas son comunes a todas las situaciones de proporcionalidad directa; en ellas, los gráficos son rectas –no verticales ni horizontales– que pasan por el origen de coordenadas (o segmentos de esas rectas), y las fórmulas tienen la forma $y = k . x$ (donde k es un número real distinto de cero).

Las Situaciones 4 y 6 son situaciones en las que existen relaciones de proporcionalidad inversa entre las variables que intervienen.

Observemos sus gráficos cartesianos:





Ambos gráficos son segmentos de hipérbolas equiláteras cuyas asíntotas son los ejes coordenados.

Observemos las fórmulas de las Situaciones 4 y 6:

- Para la Situación 4: **L** = 36 / **l**
- Para la Situación 6: **p** = - 300 / **t**

Ambas fórmulas indican que los valores de una de las variables (**L**, **p**) se obtienen dividiendo un número (36, - 300) por los valores correspondientes de la otra variable (**l**, **t**).

Estas características de los gráficos y las fórmulas son comunes a todas las situaciones de proporcionalidad inversa; en ellas, los gráficos son hipérbolas equiláteras cuyas asíntotas son los ejes coordenados (o segmentos de tales hipérbolas), y las fórmulas tienen la forma $y = k / x$ (donde k es un número real distinto de cero).

Recapitulando: tanto el gráfico como la fórmula de una relación funcional aportan indicadores confiables para evaluar si se trata de una función de proporcionalidad directa o inversa.

El gráfico de una función de proporcionalidad directa es una recta no vertical ni horizontal que pasa por el origen de coordenadas, o un segmento de una de esas rectas.

La fórmula de una función de proporcionalidad directa es de la forma $y = k . x$ *, donde* k *es un número real distinto de cero.*

El gráfico de una función de proporcionalidad inversa es una hipérbola equilátera cuyas asíntotas son los ejes coordenados, o un segmento de una de esas hipérbolas.

La fórmula de una función de proporcionalidad inversa es de la forma $y = k / x$ *, donde* k *es un número real distinto de cero.*

El lenguaje de las fórmulas: las letras en álgebra

El lenguaje algebraico (el lenguaje de las letras) tiene una fuerte presencia en Tercer Ciclo de la Educación General Básica, ciclo donde se produce el complejo tránsito de la aritmética al álgebra.

Al escribir las fórmulas asociadas a las Situaciones que analizamos, recurrimos a ese lenguaje.

En tales fórmulas, las letras que intervienen tienen el carácter de *variables.* Pero no es éste el único significado de las letras en el álgebra...

Küchemann[1] propone una clasificación ya clásica respecto del uso de las letras. Esta clasificación distingue entre letras evaluadas, letras ignoradas o no utilizadas, letras como objetos, letras como incógnitas, letras como números generalizados y letras como variables.

1. **Letras evaluadas:** corresponden a expresiones en las cuales a las letras se les asigna un valor numérico definido de antemano (aunque en principio ese valor sea desconocido).

   Por ejemplo: "Si a un número se le resta 5, se obtiene 12. ¿Cuál es el número?"

   La expresión algebraica correspondiente es $\mathbf{x} - 5 = 12$, donde $\mathbf{x}$ tiene un valor específico, inicialmente desconocido, pero evaluable (ese valor es 17).

2. **Letras ignoradas o no utilizadas:** dan origen a expresiones en las que las letras pueden ser ignoradas a los efectos de la consigna de trabajo.

   Por ejemplo: "La suma de un número con 38 es 756. ¿Cuál es la suma de aquel número con 39?"

   En símbolos algebraicos: Si $\mathbf{x} + 38 = 756$, ¿cuánto es $\mathbf{x} + 39$? En este caso, la respuesta (757) puede obtenerse prescindiendo de $\mathbf{x}$, y pensando que cualquiera sea $\mathbf{x}$ si se le suma 1 unidad más que 38, se obtiene un resultado que es 1 unidad más que 756.

   Otro ejemplo: “La diferencia entre dos números es 11. ¿Cuál es la diferencia entre los triples de esos números?”

[1] En Socas Robayna, M. M.; Camacho Machín, M.; Palarea Medina, M. M.; Hernández Domínguez, J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Madrid, Síntesis.

En código algebraico, si $x - y = 11$, ¿cuánto es $3x - 3y$? (la respuesta es 33).

Mientras que en el primer ejemplo es posible (aunque innecesario) averiguar cuánto vale **x**, en este segundo ejemplo no hay posibilidades de identificar a **x** y a **y**.

3. **Letras como objetos:** intervienen en expresiones donde las letras funcionan como el nombre de un objeto concreto.

   Por ejemplo: "Marcos y sus amigos fueron a cazar; por la mañana cazaron 4 liebres y 3 perdices; por la tarde, 5 liebres y 7 perdices. Expresar la situación simbólicamente, y determinar cuántos animales de cada clase cazaron."

   Una expresión simbólica posible es $4\,L + 3\,P + 5\,L + 7\,P = 9\,L + 10\,P$; o sea, Marcos y sus amigos cazaron 9 liebres y 10 perdices. En este caso, las letras **L** y **P** se tratan como si fueran los objetos concretos (las liebres, las perdices).

   Una situación análoga: "Simplificar $6x + 4y - 2x + y$"; en este caso, la **x** y la **y** pueden tratarse como la **L** y la **P** de la situación anterior, para producir la expresión $4x + 5y$.

4. **Letras como incógnitas específicas:** se presentan en expresiones en las cuales las letras representan números desconocidos pero particulares y específicos.

   Por ejemplo: "Para entrar a un boliche bailable, los varones pagan $ 3 cada uno y las chicas, $ 2 cada una. Anoche concurrieron al boliche **x** varones e **y** chicas, y se recaudaron $ 360 en concepto de entradas. ¿Cómo se puede simbolizar esta situación?"

   En la respuesta, $3 \,.\, x + 2 \,.\, y = 360$, las letras, **x** e **y**, representan dos cantidades desconocidas, pero particulares: las cantidades de varones y de chicas que efectivamente concurrieron al boliche anoche.

   La **d** del ítem que sigue también tiene el carácter de una incógnita específica:

1

Hace tres años Pedro tenía una cantidad de dinero **d**. Hoy ha duplicado esa cantidad. ¿Cuánto dinero tiene hoy?

- $2 \,.\, d$ ○ 1
- d^2 ○ 2
- $2 \,.\, d + 3$ ○ 3
- $2 \,.\, d - 3$ ○ 4

En este ítem, la letra **d** representa cuánto dinero tenía Pedro hace tres años; aunque desconozcamos la cifra, se trata de una cantidad determinada y específica.

5. **Letras como números generalizados:** son aquellas que representan simultáneamente a varios valores numéricos, y no a uno solo.

   Por ejemplo: "La suma de dos números naturales es 10; uno de los números es menor que el otro; ¿cuánto puede valer el número menor?"

   La traducción algebraica es $\mathbf{x} + \mathbf{y} = 10$, $\mathbf{x} < \mathbf{y}$. Los posibles valores de **x** son 1, 2, 3 y 4 (siendo **y** 9, 8, 7 y 6, respectivamente). Como se ve, **x** (y también **y**) no representa a un valor único, sino a un conjunto o rango de valores.

6. **Letras como variables:** estas letras representan a un conjunto de valores no especificados y muestran una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

   Son ejemplos las fórmulas con las que simbolizamos las relaciones entre las dos variables en juego en las Situaciones 1 a 6.

   Volvamos a la Situación 2 –la de la secretaria– y a su fórmula: $\mathbf{S} = 7 \,.\, \mathbf{c} + 650$

   La fórmula expresa que si la secretaria cumple **c** horas extras en el mes, percibirá un sueldo de $7 \,.\, \mathbf{c} + 650$ pesos.

   Es importante llamar la atención sobre dos aspectos:

   - La letra **c** representa a un conjunto de valores (todas las posibles cantidades de horas extra que la secretaria puede cumplir mensualmente). Análogamente, la letra **S** también representa a un conjunto de valores.
   - Como lo sugieren la tabla y el gráfico cartesiano de la situación, a la expresión $\mathbf{S} = 7 \,.\, \mathbf{c} + 650$ le subyace una relación de correspondencia entre cantidad de horas extra por mes e importe percibido en concepto de sueldo al cabo de ese mes.

   ¿Cuál es la utilidad de la clasificación de Küchemann para la tarea docente?

Por un lado, esta clasificación advierte sobre la necesidad de poner las letras en contexto y de no abusar de la manipulación rutinaria de letras que carecen de referentes concretos y que aparecen de forma aislada.

Es indispensable tomar en cuenta que el significado de las letras está dado por el contexto en el que se las emplea.

La práctica de la manipulación de letras por la manipulación misma puede conducir a que los alumnos se habitúen a tratar las letras sólo como meros objetos, y que no contemplen otras dimensiones de las mismas, como la de representar a un número, o a un conjunto de números.

Por otro lado, el contraste entre los distintos significados de las letras muestra la complejidad del concepto de variable; a este concepto, de fundamental importancia en álgebra, se lo suele utilizar ingenuamente, dando por sentado que se lo comprende de un modo casi natural...

El uso no problematizado de las letras como variables parecería indicar que a veces se confunde el uso de variables con el uso de letras, y se reduce el pasaje de la aritmética al álgebra a un pasaje de los números a las letras (cambio de símbolos), y no de los números a las variables (cambio de símbolos y de significados).

En el curso de ese pasaje, es necesario que el alumno se enfrente con una pluralidad de situaciones de complejidad cada vez mayor, en las cuales las letras cobren significados diferentes, y que reflexione sobre las semejanzas y las diferencias entre esas situaciones y entre los significados de las letras que las representan.

En resumen, en la medida en que la clasificación supone una secuencia y una progresión para la enseñanza del lenguaje algebraico, ayuda a tomar conciencia de que la adquisición del concepto de variable es un proceso tan crucial para el álgebra, como lento.

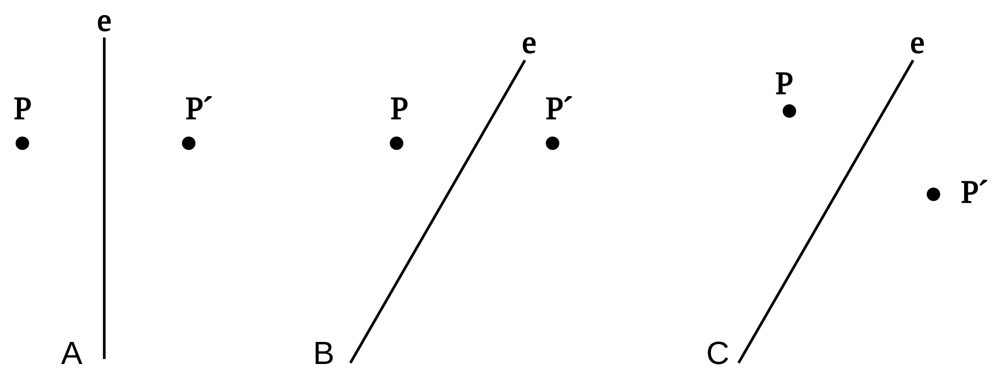
Nociones geométricas. Las transformaciones geométricas

Tres dimensiones para las transformaciones geométricas

Ante todo, mostraremos a través de tres ítems cómo las transformaciones geométricas pueden adscribirse a las tres dimensiones de las pruebas. Lo haremos mediante ítems referidos a la simetría.

11

Los siguientes gráficos muestran los puntos **P** y **P´**, y una recta **e**.
¿En cuál de ellos **P** y **P´** son simétricos respecto de **e**?



- Sólo en A. ◯ 1
- Tanto en A como en B. ◯ 2
- Tanto en A como en C. ◯ 3
- Tanto en B como en C. ◯ 4

Este ítem pertenece al eje Nociones geométricas y a la dimensión Estructuras conceptuales.

Evalúa si el alumno es capaz de reconocer situaciones de simetría axial entre dos puntos, con eje vertical y oblicuo.

En oportunidad de su aplicación, el porcentaje de alumnos que optaron por el distractor 1 fue ligeramente superior al de alumnos que eligieron la respuesta correcta (la opción 3). Los porcentajes de alumnos que se inclinaron por los distractores 2 y 4 fueron coincidentes, y algo menores que el de respuestas correctas.

Estos datos ponen de manifiesto que la simetría de eje oblicuo no siempre es reconocida como tal (alumnos que optan por el distractor 1), y que a veces se atribuye a situaciones en las que no está presente (alumnos que optan por los distractores 2 y 4).

14

Las coordenadas (x ; y) de los vértices de un triángulo T son: (1 ; 1), (3 ; 2) y (5 ; 2). El triángulo P es simétrico de T con respecto al eje X. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de P?

- (-1 ; 1), (- 3 ; 2) y (- 5 ; 2) ◯ 1
- (1 ; - 1), (3 ; - 2) y (5 ; - 2) ◯ 2
- (-1 ; - 1), (- 3 ; - 2) y (- 5 ; - 2) ◯ 3
- (1 ; 1), (2 ; 3) y (2 ; 5) ◯ 4

Este ítem pertenece al eje Nociones geométricas y a la dimensión Procesos cognitivos.

Evalúa si dadas las coordenadas de los vértices de un triángulo en un sistema de ejes cartesianos ortogonales, el alumno es capaz de identificar las coordenadas de los vértices del simétrico de dicho triángulo con respecto al eje de abscisas.

Su resolución requiere:

- Interrelacionar lenguajes: el lenguaje verbal (en el que intervienen términos y expresiones de carácter geométrico) y el lenguaje aritmético (numérico) en que está formulado el enunciado, y el lenguaje geométrico y gráfico (al que el enunciado remite).
- Relacionar las coordenadas de los vértices de los dos triángulos.

El distractor 1 consiste en las coordenadas de los vértices del simétrico del triángulo T con respecto al eje Y.

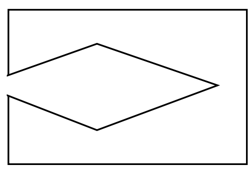
El distractor 3 consiste en las coordenadas de los vértices del simétrico de T con respecto al origen de coordenadas.

El distractor 4 presenta las coordenadas de los vértices del simétrico de T con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

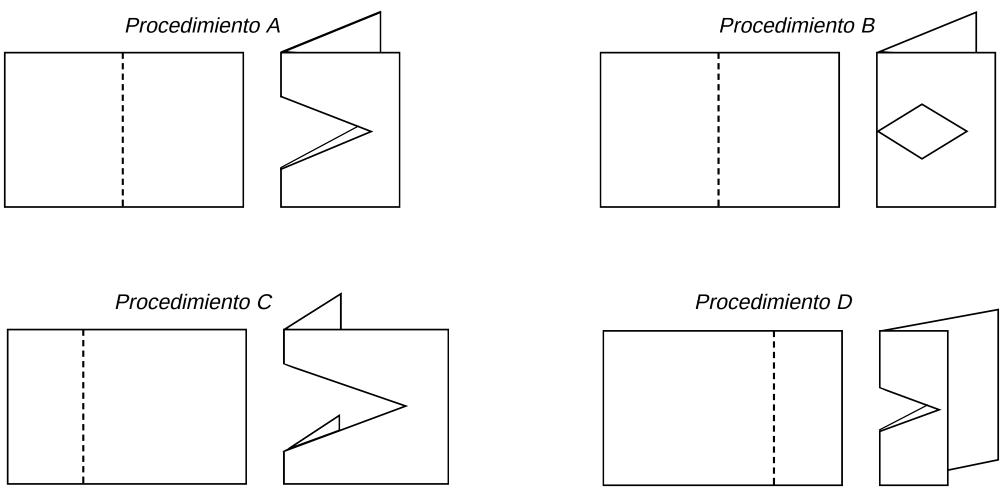
Todas las opciones de respuesta tienen en común el hecho de que en ellas se invierten en algún sentido las coordenadas de los vértices de T: en 1 se invierte el signo de las abscisas; en 2 (la respuesta correcta), el signo de las ordenadas; en 3, tanto el signo de las abscisas como el de las ordenadas; en 4, el orden (en cada par ordenado, se permutan la abscisa y la ordenada).

16

Plegando y cortando una hoja de papel se quiere obtener la siguiente figura:



¿Cuál es el procedimiento de plegado y corte que habrá que hacer? (La línea de puntos indica la línea de plegado).



- El procedimiento A ◯ 1
- El procedimiento B ◯ 2
- El procedimiento C ◯ 3
- El procedimiento D ◯ 4

Este ítem, que se inscribe en el eje Nociones geométricas y en la dimensión Procedimientos de trabajo, evalúa si a partir de interpretar representaciones bidimensionales del espacio tridimensional, y mediante un proceso de anticipaciones orientadas por nociones geométricas acerca de poligonales y simetría, el alumno es capaz de seleccionar el procedimiento que produce ciertos efectos.

La noción de simetría se vuelve un analizador clave en el proceso de selección del procedimiento.

La línea de plegado divide a la hoja de papel en dos sectores rectangulares. El corte practicado en uno de ellos se replica simétricamente en el otro, al menos hasta donde el papel lo permita...

El Procedimiento A conduce a obtener en la hoja de papel una figura simétrica con respecto a la línea de plegado (la figura es un rombo), al igual que el Procedimiento D.

Sin embargo, en el caso del Procedimiento A la línea de plegado es eje de simetría de la hoja de papel, mientras que en el caso del Procedimiento D no lo es.

Como consecuencia, la figura obtenida por el Procedimiento A es simétrica con respecto al pliegue, y también lo es con respecto al eje vertical de simetría de la hoja.

Con el Procedimiento D, en cambio, se obtiene una figura que es simétrica con respecto al pliegue, pero que no lo es con respecto al eje vertical de simetría de la hoja.

El Procedimiento B también genera una figura simétrica con respecto a la línea de plegado (figura compuesta por dos rombos con un vértice común situado sobre dicha línea), y simétrica respecto del eje vertical de simetría de la hoja.

El Procedimiento C (la respuesta correcta) produce una figura que no es simétrica respecto de la línea de plegado (el corte avanza más allá de los límites de uno de los sectores rectangulares del papel), y que tampoco lo es respecto del eje vertical de simetría de la hoja.

El cubo de las transformaciones: una herramienta para elaborar secuencias didácticas

¿Por qué enseñar las transformaciones en el contexto de la educación básica?

El interrogante admite múltiples respuestas.

Una de ellas señala que el estudio de las transformaciones contribuye a proporcionar una imagen unificada de la matemática; las transformaciones geométricas son funciones, y como tales pueden ser tratadas algebraica y analíticamente.

Sin embargo, hoy en día este argumento de índole epistemológica está en tela de juicio: ¿en qué medida los alumnos de los niveles básicos del sistema educativo pueden tomar conciencia de esa unificación, que requiere un conocimiento bastante profundo de distintos capítulos de la matemática, y una capacidad de abstracción considerable?

Quizá el principal valor de la enseñanza de las transformaciones radique en que ellas permiten un acercamiento informal e intuitivo a la geometría, como alternativa a la presentación formal habitual, basada en el método deductivo con sus axiomas, sus teoremas, sus demostraciones.

Las transformaciones son útiles para describir y comprender diversos aspectos de la realidad (ligados, por ejemplo, al arte, a la arquitectura, etc.), a la vez que permiten descubrir y justificar propiedades de las figuras geométricas, hacer predicciones, comprobarlas, etc.

Pueden construirse a partir de acciones físicas fáciles de ejecutar, tales como desplazar, plegar, reflejar, girar, ampliar, reducir, etc.

No obstante, conviene diferenciar la transformación como objeto geométrico de la acción física que la inspira.

En particular, hay una relación compleja entre las características de las transformaciones geométricas traslación, simetría axial y rotación (de las que nos ocupamos en este apartado), y las de los movimientos espaciales correspondientes: desplazar, plegar o reflejar, girar. Tres diferencias básicas entre unos y otras son:

Respecto de los movimientos...	Respecto de las transformaciones...
En un movimiento, se mueve un objeto	En la transformación, se transforma el espacio
El movimiento se realiza dentro del espacio	La transformación se realiza sobre el espacio
El movimiento sucede en el tiempo, a lo largo de un recorrido	La transformación sucede "de golpe", instantáneamente, sin recorrido intermedio

En el aula, la confusión entre una transformación y el movimiento físico con el que se relaciona se pone de manifiesto cuando el alumno tiene dificultades para admitir que dos transformaciones cuyo resultado es el mismo son iguales, aunque los movimientos asociados sean distintos; por ejemplo, como transformaciones, la composición de dos simetrías axiales cuyos ejes son perpendiculares, y la rotación de 180º alrededor del punto de intersección de los ejes, son iguales; como movimientos físicos, reflejar y girar son movimientos diferentes.

También, cuando "se resiste" a admitir que la transformación identidad –por la que cada punto es imagen de sí mismo– es una transformación, aunque no implique movimiento físico.

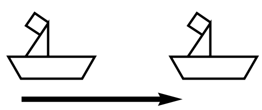
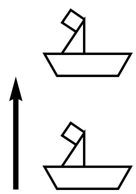
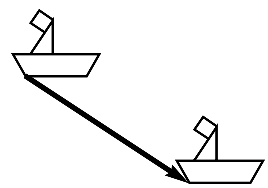
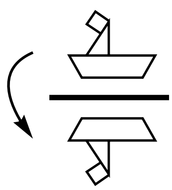
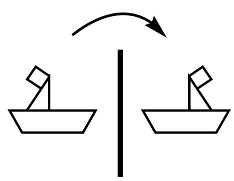
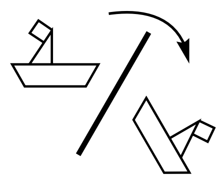
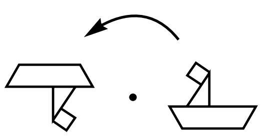
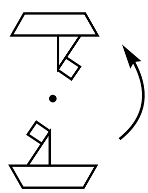
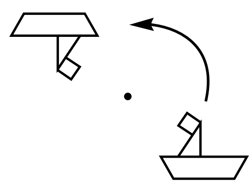
Hasta aquí, hemos intentado dar respuesta a la pregunta acerca de por qué enseñar transformaciones en la escuela de educación básica.

Preguntémonos ahora en qué orden hacerlo: por dónde empezar, cómo seguir, cómo complejizar gradualmente la presentación.

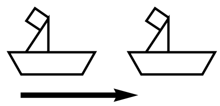
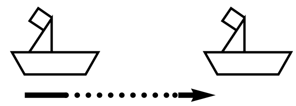
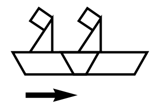
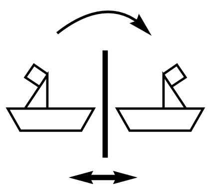
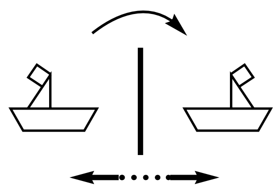
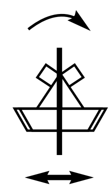
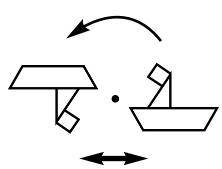
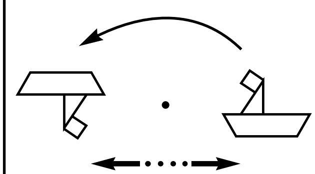
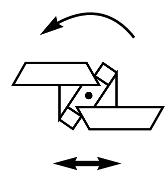
Generalmente, el criterio organizador que se utiliza para secuenciar la enseñanza de las transformaciones es el tipo de transformación: traslación, simetría, rotación, en ese orden (cabe precisar que ya las investigaciones piagetianas indicaban que los niños aprenden primero las traslaciones y las simetrías, y luego las rotaciones).

Si bien este criterio es válido, vale la pena complementarlo con otros, para contar con una base más flexible que permita articular y explorar distintas secuencias.

Un segundo criterio a considerar es la orientación de la transformación: las traslaciones horizontales o verticales suelen resultar más fáciles que las traslaciones oblicuas; las simetrías de eje horizontal o vertical, más fáciles que las de eje oblicuo; las rotaciones en las que existe una línea de referencia horizontal o vertical tanto para la figura original como para su transformada, más fáciles que aquellas en las cuales esa línea es oblicua.

Transformación	Horizontal	Vertical	Oblicua
Traslación			
Simetría			
Rotación			

Un tercer criterio a tomar en cuenta es la distancia entre la figura original y su imagen: suelen resultar más fáciles aquellas transformaciones en las cuales esa distancia es pequeña (traslaciones cortas, simetrías en las que la figura original está cerca del eje, rotaciones en las que la figura original está cerca del centro de giro), siempre y cuando no impliquen superposición o solapamiento; las situaciones de superposición suelen presentar un alto grado de dificultad.

Transformación	**Corta**	**Larga**	**Superpuesta**
Traslación			
Simetría			
Rotación			

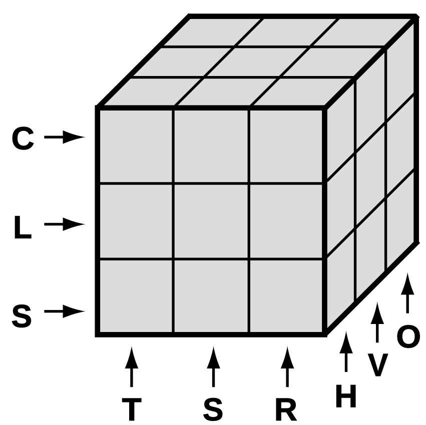
Los puntos suspensivos sugieren una distancia mayor que la que se observa en la figura.

Si consideramos simultáneamente los tres tipos de movimiento (traslación, simetría, rotación), las tres orientaciones (a las que llamaremos horizontal, vertical y oblicua) y las tres configuraciones en materia de distancia (que identificaremos como corta, larga y con superposición), contaremos con 27 situaciones posibles para trabajar las transformaciones en el aula; ellas son:

- Traslación horizontal corta
- Traslación horizontal larga
- Traslación horizontal con superposición
- Traslación vertical corta
- Traslación vertical larga
- Traslación vertical con superposición
- Traslación oblicua corta
- Traslación oblicua larga
- Traslación oblicua con superposición
- Simetría horizontal corta
- Simetría horizontal larga

- Simetría horizontal con superposición
- Simetría vertical corta
- Simetría vertical larga
- Simetría vertical con superposición
- Simetría oblicua corta
- Simetría oblicua larga
- Simetría oblicua con superposición
- Rotación horizontal corta
- Rotación horizontal larga
- Rotación horizontal con superposición
- Rotación vertical corta
- Rotación vertical larga
- Rotación vertical con superposición
- Rotación oblicua corta
- Rotación oblicua larga
- Rotación oblicua con superposición

Un modelo adecuado para representar estas posibilidades es el *cubo de las transformaciones:*



En él, cada dirección representa un criterio (tipo de movimiento, orientación, distancia), de manera que los cubitos que conforman una "capa" representan situaciones semejantes según ese criterio. Por ejemplo, los cubitos de la primera capa de abajo hacia arriba representan a las situaciones en las que la figura original y su imagen se superponen; los cubitos de la segunda capa de izquierda a derecha representan a las situaciones de simetría; los cubitos de la tercera capa del frente hacia el fondo representan a las situaciones de orientación oblicua.

Una secuencia áulica o institucional de enseñanza de las transformaciones debería barrer el espectro de las 27 posibilidades; ya señalamos cuál es el grado de dificultad esperable para una situación en función de uno de los tres criterios: las traslaciones y las simetrías parecen más fáciles que las rotaciones; las transformaciones horizontales o verticales, más fáciles que las oblicuas; las transformaciones en las cuales las distancias entre una figura y su imagen son cortas, más fáciles que aquellas en las que esas distancias son mayores, o en las que hay superposición.

Están abiertas las puertas para explorar, en el aula, la incidencia simultánea de los tres criterios en el grado de dificultad de una situación. Que es como decir que están abiertas las puertas para ensayar secuencias, evaluarlas, ajustarlas, equivocarse, dar marcha atrás, volver a avanzar... utilizando el cubo de las transformaciones como herramienta para organizar la exploración. Es más: también es legítimo ensayar secuencias que contemplen otras variables que pueden incidir en el grado de dificultad de una transformación, tales como el tamaño de la figura que se transforma, o si dicha figura representa o no a un objeto real y concreto (un barco, por ejemplo)...

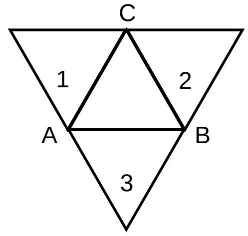
De teselas y mosaicos

Un contexto que da sentido al estudio de las transformaciones es el diseño y la construcción de *teselas* y *mosaicos.*

Según Moliner[2], una tesela es cada una de las piececitas con que se forma un mosaico; y un mosaico es un trabajo artístico hecho acoplando sobre una superficie trozos de piedra, vidrio, cerámica, etc., de distintos colores, de modo que forman figuras.

En términos geométricos (pero sin pretensiones de rigor): una tesela es una figura generadora, y un mosaico es un cubrimiento del plano que se obtiene por repetición de la tesela. A la acción de cubrir el plano con teselas se la llama teselación.

A continuación, mostramos una tesela en forma de triángulo equilátero (ABC) y un mosaico generado a partir de ella:



[2] Moliner, M. (1967). *Diccionario de uso del español.* Madrid, Gredos, 1997.

¿Cómo intervienen las transformaciones en la construcción del mosaico? Veamos una descripción posible (no es la única):

- 1 es la imagen de la tesela ABC a través de una simetría de eje AC
- 2 es la imagen de la tesela ABC a través de una simetría de eje BC
- 3 es la imagen de la tesela ABC a través de una simetría de eje AB

Si para cada triángulo equilátero obtenido se buscan sus simétricos respecto de sus tres lados, se va cubriendo el plano.

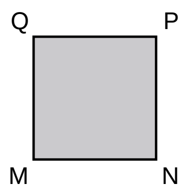
Pero las transformaciones no sólo explican cómo se genera un mosaico a partir de una tesela. También participan de la explicación de cómo se genera la propia tesela.

Sabemos que los tres polígonos regulares que pueden cubrir el plano son el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

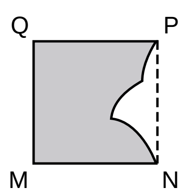
Mediante deformaciones adecuadas, se los puede transformar en teselas que también cubren el plano.

Por ejemplo:

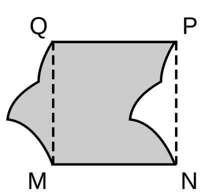
1. Partimos de un cuadrado MNPQ:



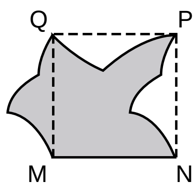
2. Hacemos un corte sobre uno de los lados, como muestra la figura:



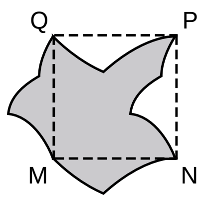
3. Trasladamos el corte sobre el lado opuesto (le aplicamos al corte una traslación de vector $\overrightarrow{NM}$):



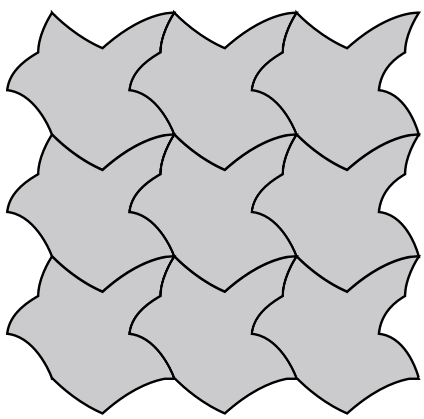
4. Hacemos otro corte sobre un tercer lado:



5. Lo trasladamos sobre el lado opuesto (por una traslación de vector $\overrightarrow{PN}$):



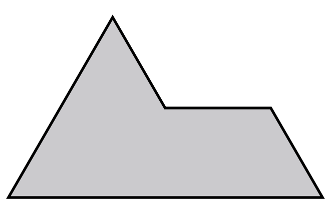
Hemos obtenido una estrella de mar. Con ella, mediante múltiples traslaciones, se puede generar un mosaico como el que sigue:



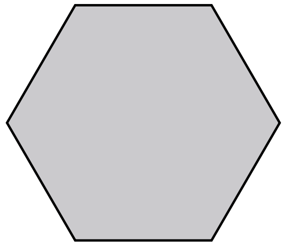
En síntesis, teselas y teselaciones permiten disfrutar en el aula de actividades y propuestas de carácter lúdico o artístico, tales como:

- Dada una tesela, construir un mosaico y explicar qué transformaciones intervienen en la construcción.

  Por ejemplo, hacerlo con esta tesela:

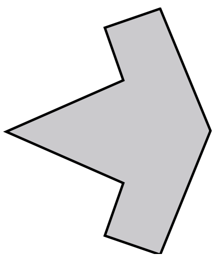


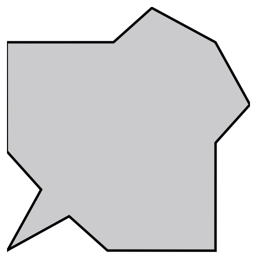
- Dado un polígono regular, construir una tesela "deformándolo" e identificar las transformaciones que intervienen. Por ejemplo:



- Dada una tesela, identificar el polígono regular y las transformaciones que le dieron origen.

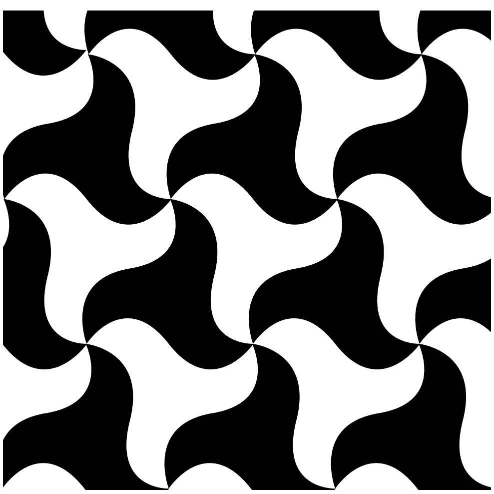
  Por ejemplo, hacerlo con estas dos teselas nazaritas[3]:

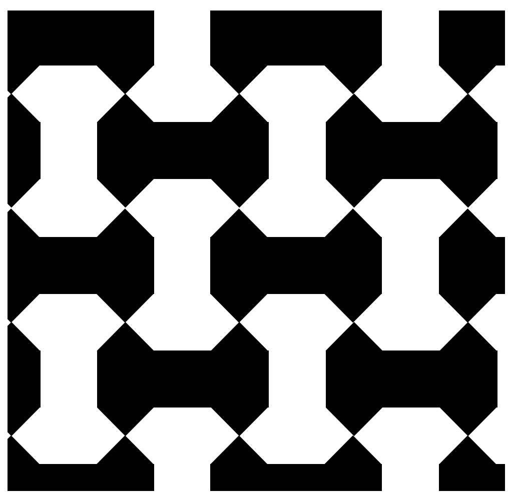




- Dado un mosaico, identificar la tesela y las transformaciones que lo generan.

  Por ejemplo, hacerlo con estos mosaicos nazaritas:



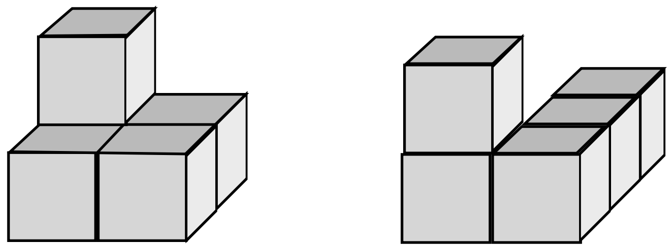


[3] Yusuf ben Názar es el fundador de la dinastía que gobernó Granada (España) entre 1231 y 1492, y que construyó los palacios del Generalife y la Alhambra; como la religión musulmana prohibe emplear imágenes de personas en la decoración, ambos monumentos son ricos en ornamentos geométricos.

Invitación al espacio

En los apartados anteriores, sólo nos hemos ocupado de las transformaciones en el plano. Sin embargo, con algunos grupos de alumnos quizá se pueda avanzar sobre las transformaciones en el espacio.

Por ejemplo, se les puede proponer que con teselas como éstas (pentominós tridimensionales):



saturen o teselen el espacio.

Así como las teselaciones planas proporcionan bases firmes para la construcción de la noción de área, las teselaciones espaciales lo hacen para la construcción de la noción de volumen. Por otra parte, resultan de interés en actividades de diseño de mobiliario modular, de viviendas y de sistemas de embalaje, e intervienen en el estudio de la disposición de las moléculas y de la estructura de los cristales en el área de la química.

Un modelo de desarrollo del razonamiento geométrico: los niveles de Van Hiele

En lo que sigue, nos proponemos presentar el modelo de desarrollo del razonamiento geométrico de Van Hiele, y ubicar en él el trabajo escolar sobre las transformaciones.

Dos educadores holandeses, los esposos Pierre Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, preocupados por las dificultades de sus alumnos para aprender geometría, desarrollaron, a partir de sus observaciones, una teoría del desarrollo del razonamiento geométrico.

Según esta teoría, en el aprendizaje de la geometría los alumnos progresan a través de distintos niveles de razonamiento, que van desde un razonamiento global y holístico que sólo permite reconocer figuras, hasta el razonamiento analítico y el pensamiento deductivo que permite producir demostraciones y pruebas formales.

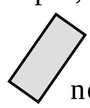
Los niveles de Van Hiele son:

1. **Nivel I** (de visualización o reconocimiento)

En este nivel, los estudiantes reconocen figuras sólo por su apariencia y por comparación con un prototipo conocido. Perciben cada figura como un todo global y como una forma aislada; no identifican sus partes y componentes, ni establecen relaciones entre ellas; tampoco establecen relaciones entre una figura y otra.

Las decisiones de los alumnos que se encuentran en este nivel se basan en la percepción, en la información visual, y no en el razonamiento. Comparan y clasifican por medio de expresiones tales como "se parece a...", "tiene la forma de...", "es como...", etc. Por ejemplo: pueden reconocer un rectángulo porque "es como una puerta". Pueden copiar figuras y recordar sus nombres.

No pueden definir una figura, sino que la describen; en esta descripción, las propiedades geométricas no se diferencian de las propiedades físicas, por lo que algunas propiedades determinantes pueden ser ignoradas (por ejemplo, que los cuatro ángulos de un rectángulo son rectos), y otras irrelevantes pueden ser tomadas en consideración (por ejemplo, la orientación espacial de la figura:

 es un rectángulo; en cambio,  no lo es).

No comprenden qué es una demostración, ni pueden hacer generalizaciones.

En la enseñanza de las transformaciones, pertenecen al Nivel I actividades tales como:

- Comparar las acciones de desplazarse, saltar y girar con la traslación, la simetría y la rotación.
- Trasladar, simetrizar y rotar una figura.

2. **Nivel II** (de análisis)

En este nivel, los alumnos pueden analizar las figuras, es decir, centrar la atención en sus partes y componentes. En consecuencia, son capaces de reconocer y enunciar propiedades, establecidas experimentalmente (construyendo, dibujando, midiendo, plegando, etc.); el razonamiento se sigue apoyando en la percepción.

Cuando describen una figura, enumeran sus propiedades sin poder diferenciar entre propiedades o condiciones necesarias y propiedades o condiciones suficientes para caracterizarla (por ejemplo, para que un paralelogramo sea un cuadrado, es necesario que sus cuatro lados sean iguales, pero no es suficiente).

Por lo tanto, no pueden establecer relaciones entre clases o familias de figuras (por ejemplo, todos los cuadrados son rombos). Es más, tienden a no aceptar que una figura puede pertenecer simultáneamente a varias clases o familias y recibir distintos nombres (un cuadrado es un rombo y también es un rectángulo, un paralelogramo, un cuadrilátero...).

No advierten todavía la necesidad y el valor de las definiciones formales: prefieren formularlas con sus propias palabras. Pueden hacer conjeturas y generalizaciones, pero no pueden demostrarlas; sin embargo, pueden ejemplificarlas y comprobarlas experimentalmente.

En la enseñanza de las transformaciones, pertenecen al Nivel II actividades tales como:

- Comparar la idea de mediatriz con la de eje de simetría.
- Encontrar todos los elementos de simetría de una figura.
- Descubrir propiedades de una figura que se conserven al someterla a traslaciones, simetrías y rotaciones.

3.**Nivel III** (de abstracción o interrelación)

Los alumnos que se encuentran en este nivel comprenden las interrelaciones entre figuras ("todos los cuadrados son rombos") y son capaces de construir argumentos informales para justificarlas. Estos argumentos combinan la manipulación experimental con el razonamiento lógico.

Ahora los estudiantes comienzan a comprender el papel de las definiciones; construyen definiciones correctas. Pueden entender una demostración explicada por el docente o por el libro de texto, pero son incapaces de producirla por sí mismos o de modificar su secuencia o de llevarla a cabo a partir de premisas diferentes. Aún no comprenden el significado profundo de la deducción y suelen confundir axiomas con teoremas.

En la enseñanza de las transformaciones, pertenecen al Nivel III actividades tales como:

- Relacionar las acciones de trasladar y girar con la de doblar (plegar).
- Explicitar todas las posibilidades de composición de dos simetrías.
- Dadas una traslación o una rotación, encontrar los ejes de las simetrías en que se las puede descomponer.

4.**Nivel IV** (de deducción)

Los estudiantes que alcanzan el Nivel IV pueden construir demostraciones y pruebas (del tipo de las que suelen presentarse sobre el final del nivel Polimodal o en los primeros años del nivel superior), entender el rol de los axiomas y las definiciones y comprender el significado de las condiciones necesarias y suficientes. Reconocen el valor de la deducción como único medio para verificar la validez de una afirmación matemática. En este nivel, la matemática es estudiada como un sistema formal, desprovisto de interpretaciones concretas.

En la enseñanza de las transformaciones, pertenecen al Nivel IV actividades tales como:

- Dadas dos posiciones de una figura, encontrar la composición de simetrías que las relaciona.
- Estudiar la generación de cualquier traslación y de cualquier rotación como resultado de la composición de simetrías.

5.**Nivel V** (de rigor)

Los alumnos que acceden a este nivel están capacitados para analizar el grado de rigor de un sistema deductivo (en términos de consistencia, independencia y completitud de sus axiomas). Pueden trabajar en distintos sistemas axiomáticos, y compararlos entre sí; por ejemplo, pueden estudiar las geometrías no euclidianas. Este último nivel, por su alto grado de abstracción, corresponde al nivel universitario del sistema educativo.

En la enseñanza de las transformaciones, pertenecen al Nivel V actividades tales como:

- Explicitar la estructura del grupo de isometrías de una figura.
- Identificar una figura a partir de conocer su grupo de isometrías.

Podríamos sintetizar las descripciones anteriores diciendo que los alumnos del Nivel I razonan sobre las figuras (y las van organizando en clases de figuras); los del Nivel II razonan sobre las clases de figuras (y van descubriendo sus propiedades); los del Nivel III razonan sobre las propiedades de las clases de figuras (que van relacionando lógicamente); los del Nivel IV razonan sobre las relaciones lógicas entre estas propiedades, y los del Nivel V, sobre los fundamentos de tales relaciones lógicas.

Clements y Battista proponen la existencia de un **Nivel 0** (de pre-reconocimiento), en el cual los alumnos advierten sólo algunas de las características visuales de una forma y no otras, por lo que no pueden distinguir entre figuras; por ejemplo, son capaces de diferenciar entre un triángulo y un cuadrilátero, pero no entre dos cuadriláteros, tales como un rombo y un paralelogramo que no lo sea.

El modelo de Van Hiele es útil como analizador y organizador del quehacer escolar. Veamos por qué:

- Los estudios de Van Hiele y otros estudios posteriores ponen de manifiesto que el progreso de un nivel al nivel siguiente depende más de las experiencias que ofrezca la escuela que de la edad o la maduración (como caso extremo: hay adultos que se encuentran en el Nivel I); tales experiencias pueden obstaculizar o facilitar los avances. Por ejemplo: si la geometría es presentada a través de la medición, de las definiciones formales y de otros recursos propios de los Niveles II y III, prescindiendo de la geometría visual del Nivel I, se corre el riesgo de que sus destinatarios estén condenados al fracaso.

Riesgos como éste son la contracara del valor que el modelo concede a las intervenciones de la escuela, al plantear que las experiencias que desde ella se propongan inciden sobre el desarrollo del razonamiento geométrico en mayor medida que las características evolutivas. En otras palabras, el modelo de Van Hiele conlleva una fuerte valoración positiva de la enseñanza y de sus posibilidades.

- En cada nivel se suponen conocidos los conocimientos del nivel anterior, ya que en aquel se explicitan las relaciones que en éste estaban implícitas; los conocimientos de un nivel son extensiones de los del nivel precedente. Cada nivel se caracteriza por habilidades de razonamiento específicas: un alumno no puede avanzar de un nivel a otro si no cuenta con esas habilidades.

  Los niveles se suceden en el orden en que los presentamos. La escuela puede acelerar el tránsito de uno a otro, pero no puede omitir ningún nivel.

  Si los alumnos se encuentran en un nivel y se les presenta una situación de aprendizaje que requiere vocabulario, conceptos y relaciones de un nivel posterior, intentarán reemplazar la comprensión por la memorización mecánica; en consecuencia, el progreso se verá perturbado, el olvido se producirá rápidamente y las posibilidades de aplicación serán escasas o nulas.

  Para los Van Hiele, una de las explicaciones más potentes del fracaso de los alumnos en geometría debe buscarse en la falta de experiencias propias de cada nivel antes de avanzar hacia los niveles posteriores.

- El modelo permite entender y explicar el porqué de los distintos niveles de desempeño de un alumno o de un grupo de alumnos ante contenidos geométricos diferentes.

  El hecho de que un alumno o un grupo de alumnos haya llegado a un nivel de razonamiento en un contenido, no garantiza que frente a otro contenido opere en el mismo nivel; por ejemplo, si el trabajo con triángulos ha sido más intenso y rico que el trabajo con cuadriláteros, los alumnos podrán razonar más sofisticadamente sobre un triángulo rectángulo isósceles que sobre un trapecio isósceles. De todos modos, si disponen de cierto nivel de razonamiento avanzado al menos en un contenido, es más fácil que puedan transferirlo a nuevos contenidos.

- Por último, la propuesta de Van Hiele sugiere una secuencia de trabajo, un orden temporal para los procesos de enseñanza, dado que indica en qué dirección hacer progresar a los alumnos, a la vez que identifica y caracteriza los sucesivos estadios de ese progreso. Sin duda, la secuencia es útil tanto para organizar la tarea en la propia aula como para hacerlo institucionalmente.

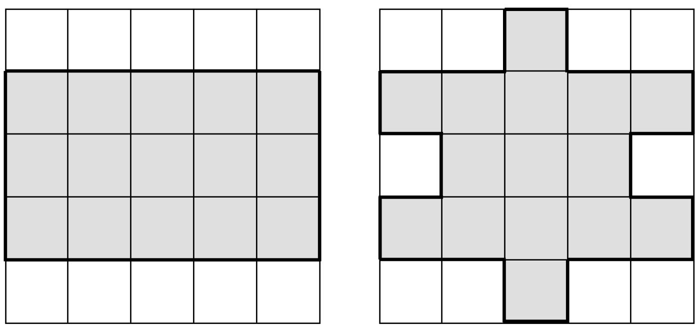
Mediciones. Perímetro, área, volumen

Tres dimensiones para la medición de perímetros, áreas y volúmenes

He aquí tres ítems que muestran cómo la medición se inscribe en las tres dimensiones que contemplan las pruebas.

18

Observá atentamente las siguientes figuras:



Ambas figuras tienen

- el mismo perímetro y la misma superficie. ○ 1
- el mismo perímetro, pero distinta superficie. ○ 2
- distinto perímetro, pero la misma superficie. ○ 3
- distinto perímetro y distinta superficie. ○ 4

Este ítem pertenece al eje Mediciones y a la dimensión Estructuras conceptuales. Evalúa si el alumno es capaz de comparar los perímetros y las áreas de dos figuras referidas a cuadrículas.

Las dos figuras tienen distinto perímetro, pero su superficie es la misma.

Los alumnos que consideran que perímetro y superficie son solidarios, en el sentido de que si dos figuras tienen el mismo perímetro, también tienen la misma superficie (y si tienen distinto perímetro, también tienen distinta superficie), se van a inclinar por el distractor 1 o por el distractor 4, según que detecten que las superficies de las dos figuras son iguales, o que sus perímetros son distintos.

Estos alumnos deciden su respuesta comparando las figuras a través de una sola de las magnitudes (la superficie o el perímetro), y dando por cierto que la otra se comporta de la misma manera.

En cambio, los alumnos que confunden perímetro con superficie van a optar por el distractor 2.

21

La heladería “La Caprichosa” sacará a la venta esta temporada una crema helada en dos tipos de envase: el envase I, que tiene forma de cilindro, y el envase II, que tiene forma de cono. Ambos tienen el mismo radio.

Para que los dos contengan la misma cantidad de crema es necesario que:

- el envase I y el envase II tengan la misma altura. ◯ 1
- la altura del envase I sea el doble de la altura del envase II. ◯ 2
- la altura del envase II sea el doble de la altura del envase I. ◯ 3
- la altura del envase II sea el triple de la altura del envase I. ◯ 4

Este ítem pertenece al eje Mediciones y a la dimensión Procesos cognitivos.

Evalúa si el alumno es capaz de establecer relaciones cuantitativas entre las alturas de un cono y un cilindro de igual volumen e igual radio, coordinando las relaciones entre los volúmenes de un cono y un cilindro de igual base e igual altura, y entre el volumen de un cuerpo y su altura.

El volumen del cilindro de radio r y altura h es

$$V_{cil} = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

mientras que el volumen del cono de igual radio (r) e igual altura (h) es

$$V_{cono} = 1/3 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = 1/3 \cdot V_{cil}$$

En consecuencia, si los dos envases tuvieran la misma altura, el envase cilíndrico contendría el triple de crema que el envase cónico.

Para que ambos envases contengan la misma cantidad de crema, como el volumen de un cuerpo es directamente proporcional a su altura, es necesario que la altura del envase cónico sea el triple de la del envase cilíndrico. De esta manera, la menor capacidad de un envase cónico frente a un envase cilíndrico de igual base e igual altura, se compensa con una mayor profundidad.

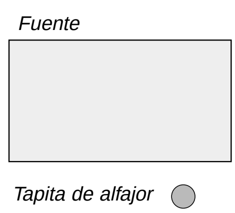
Conviene llamar la atención sobre el hecho de que el ítem está centrado en el establecimiento de relaciones y no en el recuerdo de las fórmulas de volumen, ya que éstas están a disposición de los alumnos al final de la prueba.

23

¿Cuál de los siguientes procedimientos es más conveniente para saber cuál es la máxima cantidad de tapitas de alfajores que entran en una fuente para hornear?

a) Averiguar la superficie de la fuente.
Averiguar la superficie de una tapita.
Dividir la superficie de la fuente por la superficie de la tapita.

b) Averiguar el perímetro de la fuente.
Averiguar la longitud del borde de una tapita.
Dividir el perímetro de la fuente por la longitud del borde de la tapita.



c) Averiguar cuántas tapitas entran en el largo de la fuente.
Averiguar cuántas tapitas entran en el ancho de la fuente.
Multiplicar el número de tapitas del largo por el número de tapitas del ancho.

d) Averiguar el perímetro de la fuente.
Averiguar el diámetro de una tapita.
Dividir el perímetro de la fuente por el diámetro de la tapita.

- El procedimiento **a)** ◯ 1
- El procedimiento **b)** ◯ 2
- El procedimiento **c)** ◯ 3
- El procedimiento **d)** ◯ 4

Este ítem pertenece al eje Mediciones y a la dimensión Procedimientos de trabajo.

Evalúa si el alumno es capaz de seleccionar un procedimiento adecuado para determinar cuántos círculos de radio dado son necesarios para cubrir un rectángulo también dado con los cuadrados circunscriptos a dichos círculos, en el contexto de una situación concreta.

El distractor 1 atrae a los alumnos que intentan –a través del cálculo– cubrir el rectángulo con los círculos, como si éstos fueran “deformables” y pudieran ocupar toda la superficie disponible. La pregunta a la que parecen responder es *¿Cuál de los siguientes procedimientos es más conveniente para saber cuántas veces cabe una superficie en otra?*, con independencia de las formas.

El distractor 2 puede tentar a los alumnos que piensan en términos de los contornos de la fuente y de las tapitas de alfajor, y que relacionan los respectivos perímetros. Estos alumnos “rectifican” (transforman en línea recta) tanto el contorno de la fuente como el de cada tapita, y los comparan entre sí a partir de suponer que los contornos rectificados de las tapitas se alinean unos con otros. El recuento de tapitas resulta incorrecto porque:

- surge de comparar magnitudes que no son pertinentes;
- implica contar doble las tapitas que tocan dos de los lados de la fuente (las tapitas que ocupan las esquinas);
- omite contar las tapitas que no tocan el borde de la fuente.

El distractor 4 pone en relación el perímetro de la fuente con el diámetro de cada tapita. Al igual que el distractor 2, también implica una rectificación y una alineación; en este caso, sólo se rectifica el contorno de la fuente, y se alinean a lo largo del mismo los diámetros de las tapitas. El procedimiento lleva a contar doble las tapitas que tocan dos de los lados de la fuente, y a no contar las que no tocan ninguno.

Dificultades y errores en el medir: una lectura didáctica

En el contexto escolar, es común identificar el aprendizaje de la medida con la conversión y la reducción de una unidad a otra, y con el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes mediante fórmulas estandarizadas.

A continuación, enumeramos múltiples dificultades que tal enfoque acarrea.

- **Errores de apreciación de la cantidad**

A menudo, medir requiere echar mano de los procedimientos de estimar y acotar.

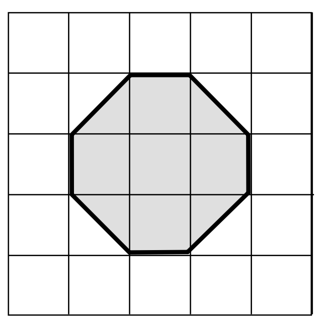
La necesidad de estimar se presenta en aquellas situaciones en las que los datos con que se cuenta no permiten calcular la medida exacta.

La necesidad de acotar se da en aquellos casos en los cuales si bien no es posible garantizar cuál es la medida exacta, sí lo es circunscribir la incertidumbre.

El ítem que sigue da pie a estimar y acotar un perímetro:

22

La siguiente figura representa una galletita dibujada sobre papel cuadriculado, cuya cuadrícula forma cuadrados de 1 cm de lado.



Una hormiga camina por el borde de la galletita. ¿Qué distancia recorre la hormiga al dar una vuelta completa?

- 8 cm ○ 1
- Más de 8 cm, pero menos de 12 cm ○ 2
- Más de 12 cm ○ 3
- Faltan datos para estimar esa distancia. ○ 4

La diagonal de cada cuadrado de la cuadrícula es mayor que el lado del cuadrado (mayor que 1 cm), y menor que la suma de dos lados (menor que 2 cm). El recorrido de la hormiga se compone de cuatro lados (4 cm) y cuatro diagonales (entre 4 cm y 8 cm); por lo tanto, es de más de 8 cm y de menos de 12 cm.

Quien no disponga de estrategias para estimar y acotar cantidades, tendrá dificultades para evaluarlas; sus apreciaciones estarán afectadas por errores de tal calibre, que pueden tornarlas inútiles.

Un error de apreciación consiste en subestimar o sobreestimar una cantidad (por ejemplo, en considerar que la distancia recorrida por la hormiga es de 8 cm, o de más de 12 cm), o en acotarla con márgenes tan estrechos que no se pueden garantizar, o tan amplios que resultan poco orientadores (por ejemplo, en encuadrar el recorrido de la hormiga entre 4 cm y 16 cm: una acotación numéricamente correcta, pero basada en márgenes demasiado generosos).

- **Escasa posibilidad de autocorrección**

  A menudo observamos que cuando los alumnos resuelven problemas de medición, obtienen respuestas claramente incorrectas y hasta disparatadas, y las aceptan como naturales y razonables: el diámetro de la Luna es de 3.500 metros, un litro de agua pesa una tonelada, el área (del piso) de un dormitorio es de una hectárea...

  Esta escasa posibilidad para considerar críticamente una respuesta reconoce –entre otras– dos causas:

  - la falta de oportunidades para experimentar, manipular y medir utilizando cintas métricas, balanzas, mosaicos para pavimentar superficies, jarras para transvasar distintos materiales tales como líquidos, arena o semillas, etc.
  - la resolución de problemas que contienen datos irreales y que "adormecen" el juicio crítico, en el sentido de que acostumbran al disparate: una señora bebe 25 litros de agua por día, un atleta recorre 350 metros en 1 segundo, 120 pintores pintan simultáneamente una pared de 3 metros por 4 metros...

- **Confusión entre magnitudes**

  A medir se aprende midiendo. Cuando en las aulas no hay instrumentos de medida (cuerdas, cintas métricas, balanzas, jarras, relojes, etc.), o cuando los hay pero no se promueve su utilización, no debería extrañar que los alumnos confundan las distintas magnitudes, y que afirmen que la superficie de un terreno es de 80 metros, o que el radio de un tanque cilíndrico es de 2 litros.

  Un caso particular: la confusión entre perímetro y área que releva el ítem con el que abrimos la reflexión sobre el eje Mediciones. A propósito, es interesante plantearles a los alumnos que a partir de una figura dada, y tijera en mano, obtengan otra del mismo perímetro y de distinta (menor, mayor) área, o de la misma área y distinto (menor, mayor) perímetro. También se puede jugar con la construcción de sólidos que tengan el mismo volumen y distinta superficie, o la misma superficie y distinto volumen (¿Se puede?).

  Por otra parte, la confusión entre magnitudes trasciende el ámbito de la escuela; es frecuente leer avisos clasificados que ofrecen departamentos de 42 metros (en lugar de 42 metros cuadrados; confusión superficie-longitud), o señales de tránsito que indican velocidades máximas de 90 kilómetros (en lugar de 90 kilómetros por hora; confusión velocidad-longitud).

- **Uso erróneo de los sentidos**

  Los sentidos juegan un papel crucial en la construcción intelectual de las magnitudes.

  Si se los desestima, si no se da suficiente lugar a la exploración sensorial, bien puede suceder que alumnos de Tercer Ciclo intenten determinar el peso de un ladrillo a través de la vista, o la capacidad de una jarra a través del tacto; en el primer caso, el error consiste en estimar el peso a partir del tamaño; en el segundo, en estimar la capacidad a partir del peso (para que el tamaño sea un buen indicador del peso, o el peso lo sea de la capacidad, es necesario hacer intervenir las noción de peso específico; hay objetos pequeños y muy pesados, hay recipientes pesados y con poca capacidad).

  Permitir que los alumnos experimenten con los sentidos, y enseñarles a discriminar cuál es el sentido más adecuado para cada medición, también son "asuntos escolares".

- **Uso de instrumentos inadecuados**

  Una anécdota real: Se le pregunta a un grupo de chicos qué cantidad de agua sale de una canilla en un minuto; uno de los chicos del grupo abre la canilla, toma una regla graduada y la sostiene paralelamente al chorro que cae...

  ¿Cómo actuar preventivamente para que estas escenas no se produzcan? Ofreciéndoles a los alumnos ocasiones frecuentes para medir; enfrentándolos a situaciones en las que el problema a resolver sea justamente la elección del instrumento de medición; poniendo a su disposición múltiples instrumentos, y no sólo los instrumentos convencionales.

  Por ejemplo, si se trata de medir directamente la longitud de una circunferencia (no, de calcularla), es conveniente que el uso de un trozo de piolín preceda al uso de la regla.

- **Uso inadecuado de los instrumentos de medición**

  Suele ocurrir que los alumnos no sepan dónde ubicar el cero de la regla para medir una longitud, y que confundan el cero con el borde de la regla.

  También es frecuente que no sepan dónde ubicar el cero del transportador para medir la amplitud de un ángulo, ni cómo orientar el instrumento.

  O que utilicen la regla para reconocer ángulos rectos, como si se tratara de una escuadra (el fabricante de la regla no garantiza la perpendicularidad de los bordes: sólo garantiza la rectilinealidad de uno de ellos).

  Para medir, no sólo hay que saber seleccionar el instrumento de medición más adecuado a cada situación. También es necesario saber utilizarlo adecuadamente.

  El uso de los instrumentos de medición es un contenido escolar de marcado carácter procedimental. Como tal, requiere enseñanza. Los procedimientos se aprenden ejecutándolos; no es suficiente que el profesor confíe en que los alumnos aprendan a utilizar los instrumentos por el sólo hecho de que observan cómo los utiliza él mientras aborda contenidos conceptuales.

- **Uso de procedimientos inadecuados**

  Son procedimientos inadecuados:

  - medir una cuerda no tensa con un instrumento rígido
  - medir la capacidad de un balde mediante el transvasamiento del líquido que contiene, y no evitar (o, al menos, controlar) las pérdidas
  - medir el peso de un objeto mediante una balanza que no está equilibrada
  - medir una superficie recubriéndola o pavimentándola con superficies más pequeñas y dejar huecos

  En el aula, los procedimientos utilizados por los alumnos para medir merecen ser puestos en común y analizados críticamente en términos de su corrección, de su eficiencia, etc.

- **Elección de una unidad inadecuada**

  Medir implica elegir una unidad acorde a la cantidad que se pretende medir: las pesas de 5 gramos son adecuadas para pesar sustancias químicas en una experiencia de laboratorio, pero no lo son para pesar un cerdo; un vaso es útil para medir el volumen de una jarra, pero no lo es para medir el volumen de un tanque australiano.

  También la elección de la unidad debe ser puesta en cuestión en el aula.

- **Producción de escrituras sin sentido**

  Consideremos el siguiente problema: El piso de un patio tiene una superficie de 12 m^2; está cubierto por 48 baldosones cuadrados; ¿Cuál es el área de cada baldosón?

  Al resolverlo, los alumnos suelen escribir: $12 / 48 = 0,25 = 0,25\ m^2$

  La escritura anterior es errónea: 0,25 no es igual a 0,25 m^2; en efecto: 0,25 es un número, en tanto que 0,25 m^2 es el valor de la superficie de un baldosón, expresado en la unidad m^2.

- **Uso abusivo de la exactitud**

  a) Medidas exactas, ¿medidas enteras?

  Quizá como consecuencia de que en la escuela se miden pocos objetos reales, las medidas enteras gozan de cierto prestigio, y se las considera más exactas que las medidas que no son enteras.

  Sin embargo, la exactitud de una medida es independiente de su condición de entera. "2 metros" puede ser una medida exacta (y entera), pero "1,98 metros" también puede serlo.

  Los problemas escolares suelen dar resultados enteros; cuando no es así, los alumnos desconfían, y hasta ocultan la supuesta inexactitud mediante redondeos peligrosos (si compramos una mesada de 2 metros de largo, y sólo disponemos de 1,98 metros, la mesada no va a caber, y vamos a tener que romper paredes...; por lo tanto, no siempre es legítimo redondear 1,98 a 2).

b) Muchos decimales, ¿más exactitud?

Con 17 metros de cinta celeste y blanca, la directora de una escuela quiere hacer 230 escarapelas para los alumnos. ¿Cuánta cinta puede destinar a cada escarapela?

Al hacer la división 17 : 230, una calculadora da como resultado 0,073913; otra, 0,07391304; y otra, 0,07391304348.

Es tentador pensar que este último resultado es el que da pie a la respuesta más exacta.

Pero, ¿es una respuesta exacta decir que la directora puede destinar 0,073913043 metros de cinta (o su equivalente, 7,3913043 centímetros) a cada escarapela?

En realidad, en términos de mediciones, no lo es, o no lo es más que la respuesta 7,3 o 7,4 cm, ya que toda cifra que exceda la precisión del milímetro está de más, pues carece de significado físico concreto.

En el mejor de los casos, los 17 metros de los que depende el cálculo están medidos con esa precisión (si no con precisiones menores, como el centímetro); y la directora no puede ir más allá de ella, porque los instrumentos con los que se miden longitudes en estos casos no permiten lecturas de órdenes inferiores al milímetro.

El ejemplo muestra que los muchos decimales pueden producir la ilusión de la exactitud en situaciones en que ésta no es tal.

En síntesis: la exactitud de una medida es contextual; no puede juzgarse en términos absolutos, sino en referencia a qué se mide y para qué.

Decir que una persona pesa entre 65 y 70 kilos puede ser suficiente para determinar cuántas calorías diarias debe consumir. Mientras que un error de 1 miligramo en la dosis de un medicamento puede ser fatal.

- **Carencia de estrategias para medir objetos reales**

La escuela suele privilegiar el tratamiento de situaciones en las cuales los perímetros, las áreas y los volúmenes que se calculan lo son de objetos de forma regular.

La realidad, en cambio, es menos regular, y a veces los alumnos fracasan cuando deben calcular la longitud de un sendero de trazo irregular, o la superficie de la carrocería de un coche para estimar cuánta pintura requiere, o cuánta tela lleva un vestido, o cuál es la capacidad de un depósito de forma irregular.

Si la realidad no entra a la escuela para ser medida con sus "imperfecciones", con sus "irregularidades" y con sus "imprecisiones", los aprendizajes escolares quedan condenados a la artificialidad y se corre el riesgo de que resulten poco útiles.

Enseñando a medir: una progresión posible. De la estimación sensorial a la aritmetización de la medida

Reflexionar críticamente acerca del proceso de enseñanza de la medida, modificar prácticas escolares... Sí, pero: ¿cómo?

A continuación se propone una progresión posible sobre la cual reflexionar, y a partir de la cual introducir eventuales modificaciones; esta progresión didáctica toma en consideración los aportes de los estudios psicológicos y cognitivos respecto de la génesis de las ideas de magnitud y medida; sintéticamente, se articula en torno de:

1. Los procesos de clasificación y seriación: estimación sensorial, comparación directa, comparación indirecta, transitividad.
2. El problema de la elección de la unidad.
3. La relación entre distintas unidades; cambios y reducciones.
4. La necesidad de un sistema de medida; sistemas irregulares y regulares.
5. El problema de la comunicación; sistemas legales; SIMELA.
6. La aritmetización de la medida.

1. Los procesos de clasificación y seriación: estimación sensorial, comparación directa, comparación indirecta, transitividad.

Los procesos de clasificación y seriación están en la base de la construcción del concepto de las magnitudes, como la longitud –ligada al perímetro–, el área y el volumen.

En esa construcción, tales procesos juegan de la siguiente manera:

- Se parte de un conjunto de objetos (segmentos, barras, cuerdas, etc., en el caso de la longitud; figuras, planchas de diversos materiales, etc., en el caso del área; bloques, jarras, etc., en el caso del volumen); de entre todas las propiedades de esos objetos (color, material del que están hechos, textura, longitud, área, volumen, etc.) se elige una que sea medible (el material no lo es; en cambio, la longitud, el área y el volumen sí lo son).

- Los objetos del conjunto se comparan según el criterio “tiene la misma longitud (o la misma área, o el mismo volumen) que”. A través de esta comparación, los objetos quedan clasificados en función de la propiedad elegida, es decir, se forman subconjuntos cada uno de los cuales está formado por objetos que tienen la misma longitud (o la misma área, o el mismo volumen). Cada subconjunto puede ser adecuadamente representado por uno de sus elementos, ya que todos estos son equivalentes desde el punto de vista de la propiedad seleccionada. En otras palabras, cada subconjunto es una cantidad de longitud (o de área, o de volumen).

- Comparando los objetos representantes de esos subconjuntos por el criterio “tiene mayor longitud (o mayor área, o mayor volumen) que”, se pueden seriar u ordenar tales representantes (del más corto al más largo, del menos extenso en área hasta el más extenso en área, del menos voluminoso al más voluminoso); como consecuencia, quedan ordenados los propios subconjuntos, o sea, las cantidades de longitud (o de área, o de volumen).

Ofrecer a los alumnos desde los primeros años de su escolarización diversas oportunidades de clasificar y seriar en las distintas magnitudes, favorece tanto la consideración y la percepción de esa magnitud, como su conservación.

La consideración o percepción de una magnitud consiste en reconocerla como una propiedad diferenciada de los objetos, diferente de las demás propiedades (recordemos que en el primer ítem que comentamos al tratar este eje, hay un distractor que recoge la confusión entre perímetro y área).

Es más difícil percibir el volumen de un objeto que percibir la longitud o el área; generalmente, longitud y área pueden captarse de un golpe de vista; la percepción del volumen, en cambio, suele exigir la elaboración de representaciones mentales del objeto a partir de los datos que suministran la vista y el tacto (¿Vio Ud. alguna vez una naranja? Seguramente, no; quédese tranquilo, que nosotros tampoco... En efecto: imagine que nos ubicamos ante una naranja, y que vamos modificando nuestra posición, o la de la naranja; en ningún caso lograremos ver la naranja, toda la naranja: sólo iremos obteniendo visiones parciales que es necesario articular a través de una representación mental).

Un trabajo escolar centrado exclusivamente en la representación gráfica bidimensional de los objetos tridimensionales no hace más que potenciar la dificultad que de por sí plantea la percepción del volumen.

La conservación de una magnitud consiste en aceptar que la propiedad de que se trata permanece invariante ante ciertas transformaciones; por ejemplo, la longitud de un hilo estirado no se modifica si se lo enrolla; el área de una lámina de cartón no cambia si se la fragmenta en trozos; la capacidad de una jarra es independiente del líquido con que se la llena.

La **estimación sensorial**, es decir, la utilización de los sentidos para medir, merece ser tenida en cuenta en el proceso de enseñanza de la medida.

Como prueba de que hasta ahora se la ha descuidado, haga la siguiente experiencia: pídales a sus alumnos (o a sus amigos) que estimen sensorialmente la longitud de un tramo de calle, el frente de una casa, el diámetro de una taza de café, el perímetro y el área de un lote, el volumen de su propio cuerpo, etc.; preste atención a sus reacciones y compare las respuestas que recibe...

La estimación sensorial interviene tanto en las actividades de comparación directa como en las de comparación indirecta.

La **comparación directa** es aquella que se hace perceptivamente.

En algunos casos, los objetos que se comparan por comparación directa se pueden desplazar; para comparar la longitud de dos palos de escoba, o la superficie de dos trozos de papel, se los puede superponer; para comparar el volumen de dos cajas, se puede meter una en la otra.

En otros casos, el desplazamiento no es posible (es lo que ocurre al comparar la altura de dos árboles, o la superficie de dos terrenos, o los volúmenes de dos tanques en una destilería de petróleo), por lo que la comparación directa se hace "a ojo"; está claro que resulta más sencilla si los objetos están cerca uno del otro que si están alejados.

Dos son las limitaciones que nos llevan a abandonar la comparación directa en dirección a formas más efectivas de medir: una de ellas es que la diferencia de tamaño de los objetos sea mínima y difícil de apreciar; la otra, que los objetos no se puedan desplazar y estén alejados ("¿Cabe esta alfombra en el living de mi casa?").

La **comparación indirecta** es aquella que se hace con ayuda de un término medio, de un tercer objeto.

Este tercer objeto tanto puede ser una parte del cuerpo (las manos, los pies: piénsese en las primitivas unidades de medida utilizadas por la humanidad) como otro tipo de objeto (una lapicera para comparar las longitudes de dos varillas; un trozo de cartón para comparar las áreas de dos hojas de papel; un dado para comparar los volúmenes de dos cajitas).

A la comparación indirecta le subyace la **transitividad** de la relación de orden correspondiente.

Si la ventana es más ancha que el palo de escoba (objeto intermediario), y el palo de escoba es más largo que el ancho de la puerta, entonces la ventana es más ancha que la puerta. En símbolos, si $A > B$ y $B > C$, entonces $A > C$.

La transitividad es una conquista intelectual; cuando los niños comienzan a medir (en el sentido de comparar objetos según una magnitud) no comprenden esta propiedad y no la aplican.

Supongamos que se trata de ordenar un grupo de varillas por su longitud, de la más corta a la más larga.

Supongamos, también, que un niño pequeño compara las varillas A y B, y descubre que A es más larga que B; después, compara B y C, y encuentra que B es más larga que C; para decidir que A es más larga que C, necesita compararlas: no puede inferir esta relación de las dos relaciones anteriores.

La comparación indirecta implica un avance con respecto a la comparación directa y en dirección a la medición genuina. No obstante, el elemento intermediario que interviene en ella no es todavía una unidad de medida, ya que trae aparejados problemas de falta de homogeneidad (medimos la longitud de un pasillo en zancadas: ¿habremos abierto siempre igual las piernas en las sucesivas zancadas?), dificultades de superposición (¿no habremos dejado huecos entre zancada y zancada? ¿nos habremos desplazado en línea recta?), dificultades de comunicación y verificación (las zancadas varían de persona a persona).

En el ámbito escolar, clasificar objetos según su longitud, su capacidad, su peso, su superficie, su volumen, etc., seriarlos u ordenarlos, estimar cantidades sensorialmente, hacer comparaciones directas e indirectas, son actividades que permiten a los alumnos acercarse tempranamente a la medición de cantidades de las distintas magnitudes; son oportunidades para "medir" mucho antes de poder hacerlo "con todas las de la ley" .

2. El problema de la elección de la unidad.

Medir es realizar una comparación indirecta en la cual se escoge de antemano el objeto intermediario, de modo que sirva como referencia única.

La elección de la unidad de medida implica considerar al menos tres cuestiones: la arbitrariedad, la adecuación y el encuadramiento.

La elección de la unidad de medida es arbitraria, pero esa arbitrariedad tiene un límite. Por eso la humanidad ha ido abandonado las unidades de medida antropométricas (basadas en partes del cuerpo humano).

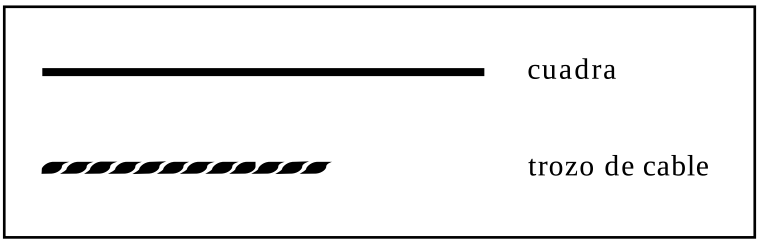
La elección de la unidad supone una adecuación entre ella y lo que se desea medir. No parece adecuado medir la longitud de una cuadra tomando como unidad de medida un fósforo, ni la superficie de un lago tomando como unidad de medida una moneda, ni el volumen de una pileta de natación tomando como unidad de medida una cucharita de café...

Pero la adecuación es complementaria de la posibilidad de encuadramiento.

Rara vez las medidas son enteras; rara vez la unidad elegida “cabe” un número entero de veces en la cantidad que se mide; en general, “no llegamos” o “nos pasamos”; en estos casos, la unidad debe permitirnos encuadrar razonablemente la medida de la cantidad, o sea, decir entre cuántas y cuántas unidades está.

Si la unidad es muy pequeña, el encuadramiento será muy preciso; nos permitirá afirmar, por ejemplo, que la longitud de la cuadra está entre 3.333 y 3.334 fósforos; pero... ¿quién se ocupa de medirla y de contar los fósforos???

Si la unidad es muy grande, se facilitan la medición y el recuento de unidades, pero el encuadramiento puede ser inútilmente impreciso; es lo que ocurre si medimos la longitud de una cuadra con un trozo de cable, tal como muestra la figura:



Es fácil advertir que la cuadra mide entre 1 y 2 trozos de cable, pero este encuadramiento deja bastante que desear.

En resumen, elegir la unidad de medida es casi un arte; requiere práctica, y la discusión permanente de las condiciones de arbitrariedad, adecuación y posibilidad de encuadramiento. La enseñanza de la medida no puede desentenderse de estos requerimientos.

3. La relación entre distintas unidades; cambios y reducciones.

Imaginemos que dos personas han medido el área de una habitación; una de ellas lo ha hecho con una alfombra de las que se suelen colocar al costado de la cama; la otra, con una cartulina; la primera informa que el área de la habitación es como la de 20 alfombras; la segunda, que dicha área equivale a la de 50 cartulinas.

¿Cómo saber si sus resultados son coincidentes? Para ello, es necesario establecer la equivalencia en área entre la alfombra y la cartulina, y realizar un cambio o una reducción de unidad.

Cambios como éstos pueden y deben efectuarse en el aula aun antes de introducir los sistemas convencionales de unidades.

Además, es deseable que se hagan manipulativamente, con materiales físicos concretos y tangibles (las cartulinas, las alfombras), y que después, sólo después, se traduzcan en cálculos numéricos.

En el ejemplo: si cada alfombra equivaliera a 2,5 cartulinas, las medidas obtenidas por los dos medidores serían concordantes.

4. La necesidad de un sistema de medida; sistemas irregulares y regulares.

¿Por qué se utilizan **sistemas** de medición, formados por varias unidades de medida, y no, unidades aisladas?

Recordemos la dificultad que plantean las medidas no enteras. Una manera de salvar esa dificultad es recurriendo al encuadramiento.

Pero hay otra posibilidad, más sofisticada: utilizar varias unidades de medida de distintos tamaños.

Por ejemplo, para medir la longitud de la cuadra podrían emplearse trozos de cable (como los de la última ilustración), palos de escoba y lápices, y proceder del siguiente modo:

- Alinear trozos de cable hasta sobrepasar la longitud de la cuadra; retirar el último trozo.
- A continuación del último trozo de cable, alinear palos de escoba hasta sobrepasar la longitud de la cuadra; retirar el último palo.
- A continuación del último palo, alinear lápices aproximándose tanto como sea posible a la longitud de la cuadra.

La longitud de la cuadra vendría dada por una expresión del tipo: 1 trozo de cable, 23 palos de escoba, 3 lápices.

Bien podría ocurrir que la longitud del trozo de cable equivaliera a la de 60 palos de escoba, y la del palo de escoba, a la de 8 lápices.

Las relaciones entre una unidad y la unidad siguiente no son regulares, no son constantes (1 a 60, 1 a 8). Un sistema de medida de este tipo se dice sistema **irregular**.

Los primitivos sistemas de medida, de fuerte contenido antropométrico, eran irregulares.

La irregularidad de un sistema dificulta los cambios y las reducciones. Esta dificultad conduce naturalmente hacia los sistemas **regulares**, que son aquellos en los cuales las unidades de los distintos órdenes se forman recursivamente según una relación constante.

Sería el caso de un sistema para medir longitudes formado por varillitas, varillas y varillones, en el que la longitud de un varillón fuera 4 veces la de una varilla, y la de una varilla, 4 veces la de una varillita. En este sistema, no tiene sentido usar más de tres veces una unidad dada, pues cuatro unidades de un orden equivalen a una unidad del orden superior siguiente; así, la expresión 2 varillones, 3 varillas, 4 varillitas es equivalente a 2 varillones, 4 varillas, que a su vez equivale a 3 varillones; y utilizando una notación posicional, esta expresión podría escribirse como 300, que se lee "tres cero cero varillitas".

Pero hay más: cualquiera de las unidades del sistema se puede adoptar como unidad fundamental; las unidades más grandes que ella son sus múltiplos o sobreunidades; las más pequeñas, sus submúltiplos o subunidades.

Si la unidad fundamental fuera "la varilla", ¿cómo expresar una longitud de 2 varillones 3 varillas 1 varillita? Muy simple: recurriendo a un número con coma; en este caso: 23,1; la coma está a la derecha de la posición de la unidad fundamental, y es un indicador de tal posición.

Atención: si desconocemos cuál es la unidad fundamental, las escrituras son indescifrables. La expresión 1,2 puede significar:

- 0 (ningún) varillón, 1 varilla, 2 varillitas, si la unidad fundamental fuera la varilla, el varillón su múltiplo y la varillita su submúltiplo
- 1 varillón, 2 varillas, 0 (ninguna) varillita, si la unidad fundamental fuera el varillón, y la varilla y la varillita, sus submúltiplos

Pongamos a prueba estas ideas. Supongamos que {A, B, C, D, E} es un sistema regular de medidas de área, en el que los cambios se hacen de 5 en 5, y en el que $E < D < C < B < A$.

¿Qué significa esta descripción? Que A, B, C, D y E son las unidades del sistema (como los varillones, las varillas y las varillitas del ejemplo anterior), y que $A = 5B$, $B = 5C$, $C = 5D$ y $D = 5E$.

¿Cómo se escribe correctamente el área 3A 2B 7C 5D 6E? Como 5 unidades de un orden equivalen a 1 unidad del orden inmediato superior, la escritura correcta es 3A 3B 3C 1D 1E; efectivamente:

- 6 unidades E equivalen a 1 unidad D y 1 unidad E; por lo tanto, 3A 2B 7C 5D 6E equivale a 3A 2B 7C 6D 1E
- 6 unidades D equivalen a 1 unidad C y 1 unidad D; por lo tanto 3A 2B 7C 6D 1E equivale a 3A 2B 8C 1D 1E
- 8 unidades C equivalen a 1 unidad B y 3 unidades C; por lo tanto, 3A 2B 8C 1D 1E equivale a 3A 3B 3C 1D 1E

¿Cómo se reduce esta última escritura a una escritura posicional en unidades E? 33311

¿Y en unidades D? 3331,1

¿Y en unidades C? 333,11

¿Y en unidades B? 33,311

¿Y en unidades A? 3,3311

Antes de seguir

Tal vez los sistemas no convencionales de unidades le planteen dificultades de lectura e interpretación.

Si es así, acuse recibo de la dificultad, y capitalice el esfuerzo didácticamente: las dificultades que a usted (a nosotros) le(nos) provocan estos sistemas, son idénticas a las que deben vencer nuestros alumnos para apropiarse del Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA)...

5. El problema de la comunicación; sistemas legales; SIMELA.

En principio, cualquier sistema regular sería adecuado para expresar mediciones. Sin embargo, la necesidad de comunicarse justifica el uso de un sistema común de medidas.

Decir que el área de un terreno es 3A 3B 3C 1D 1E, no significa nada para quien no conoce las unidades que intervienen.

Es por eso que las sociedades acuerdan en el uso de un sistema de medición regular determinado, que suele denominarse *legal* cuando su uso es proclamado por ley.

En nuestro país, ese sistema es el Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA), en el cual, por ejemplo, las unidades de longitud, masa, superficie y volumen son el metro, el kilogramo, el metro cuadrado y el metro cúbico, respectivamente.

Para las medidas de longitud, masa, superficie y volumen en el SIMELA, así como para las habitualmente llamadas **medidas de capacidad** (unidad: litro), que el SIMELA sólo considera en relación con las de volumen, una unidad de un orden equivale a 10 unidades del orden inmediato inferior (longitud, masa, capacidad), a 100 unidades del orden inmediato inferior (superficie) o a 1.000 unidades del orden inmediato inferior (volumen).

Esta estructura decimal (característica del tradicional Sistema Métrico Decimal) es la misma que la de nuestro sistema de numeración, lo que facilita los cálculos a la vez que permite vincular y potenciar los aprendizajes en uno y otro campo.

Enfaticemos el hecho de que los sistemas legales (con su trama de símbolos, nombres, unidades, múltiplos y submúltiplos) son un punto de llegada para la humanidad, una construcción histórica y social, por lo que mal pueden nuestros alumnos reconstruirlos y apropiárselos sin transitar por las etapas que hemos descripto.

6. La aritmetización de la medida.

En el ámbito escolar suele percibirse cierta tendencia a que tengan lugar dos identificaciones:

- la enseñanza de la geometría se identifica con la de la medición y se restringe a ella;
- la enseñanza de la medición, a su vez, se identifica con la enseñanza del sistema métrico legal (reducción entre unidades de distintos órdenes: unidades, múltiplos y submúltiplos) y de las fórmulas para calcular perímetros, áreas y volúmenes, a las cuales se limita.

Si bien el eje Mediciones tiene un fuerte contenido geométrico, en tanto incluye la medición de propiedades de figuras y cuerpos tales como el perímetro, el área y el volumen, también incluye aspectos no geométricos, tales como la medición de la masa, el peso, el tiempo, el valor económico (a través del dinero), etc.

Por otra parte, como muestra la progresión que estamos presentando, enseñar a medir en la escuela supone un largo camino; sólo hacia el final de ese camino, las mediciones se “aritmetizan”, es decir, articulan número y geometría, y desembocan en las tradicionales fórmulas.

En este apartado, queremos ocuparnos de la última fase en la construcción escolar de la medida de perímetros, áreas y volúmenes: su aritmetización a través de fórmulas de cálculo.

Es habitual que las fórmulas se apliquen a la resolución de ejercicios y problemas que consisten en calcular el perímetro, el área o el volumen de una figura o de un cuerpo conociendo sus dimensiones lineales (lados, bases, alturas, apotemas, radios, aristas). Por ejemplo:

- Calcular el perímetro de un rectángulo cuyos lados son de 2,5 m y 3 m.
- Calcular el área de un cuadrado de 4 cm de lado.
- Calcular el volumen de una esfera de 10 cm de radio.

También suelen presentarse los problemas inversos: dados el perímetro o el área o el volumen de la figura o del cuerpo (y, si es necesario, alguna de sus dimensiones lineales), determinar una de sus dimensiones lineales. Por ejemplo:

- Calcular la longitud de uno de los lados de un rectángulo sabiendo que su perímetro es de 10 cm y que la longitud del otro lado es de 2 cm.
- Calcular la longitud del lado de un cuadrado de 25 m^2 de superficie.
- Calcular el radio de una esfera cuyo volumen es de 7.235 dm^3.

(Obviamente, los ejemplos anteriores son extremadamente esquemáticos, y sólo apuntan a caracterizar el tipo de problemas de que se trata; a menudo, estos problemas están vinculados a situaciones de la vida cotidiana, en las cuales las figuras y los cuerpos geométricos modelan el piso de una habitación, una alfombra, un terreno, un depósito, etc.).

Estas aplicaciones de las fórmulas en contextos numéricos son necesarias, pero quizá puedan calificarse de insuficientes, en el sentido de que pueden enriquecerse y complejizarse con aplicaciones alternativas.

A modo de ejemplo, recordemos el ítem de la heladería La Caprichosa.

En situaciones como la que ejemplifica el ítem, la fórmula se aplica no para hacer cálculos efectivos, sino para establecer relaciones.

Básicamente, se trata de situaciones en las cuales:

- no se cuenta con datos numéricos acerca de las dimensiones de las figuras o los cuerpos que intervienen, y
- se conoce la relación entre alguno de los aspectos medibles de dos figuras o cuerpos (sus dimensiones lineales, su perímetro, su área o su volumen), y hay que establecer la relación entre los demás aspectos, o bien
- se modifica uno de los aspectos medibles de una figura o un cuerpo (sus dimensiones lineales, su perímetro, su área o su volumen) y, conociendo la modificación, hay que evaluar cómo impacta en los demás aspectos.

Como propuestas disparadoras de ideas, van las siguientes:

- El lado de un cuadrado se incrementa en 3 cm. ¿Qué sucede con el perímetro?
- Uno de los lados de un rectángulo se incrementa en 3 cm; el otro no se modifica. ¿Qué sucede con el perímetro?
- Uno de los lados de un rectángulo se incrementa en 3 cm; el otro, en 2 cm. ¿Qué sucede con el perímetro?
- Uno de los lados de un rectángulo se incrementa en 3 cm; el otro se disminuye en 2 cm. ¿Qué sucede con el perímetro?
- Se duplican los lados de un cuadrado. ¿Qué sucede con el perímetro? ¿Y con el área?
- Se duplican los lados de un rectángulo. ¿Qué sucede con el perímetro? ¿Y con el área?
- El perímetro de un cuadrado es 10 cm mayor que el de otro cuadrado. ¿Qué relación existe entre los lados de ambos cuadrados?
- El perímetro de un rectángulo es 3 cm mayor que el de otro rectángulo. ¿Qué relación existe entre los lados de ambos rectángulos? Ejemplificar distintas posibilidades.
- El perímetro de un rectángulo es 3 cm mayor que el de otro rectángulo. Uno de los

lados del primer rectángulo es 5 cm menor que el lado correspondiente del segundo rectángulo. ¿Qué relación existe entre los otros lados?

- El perímetro de un cuadrado es el triple del de otro cuadrado. ¿Qué relación existe entre los lados de ambos cuadrados? ¿Y entre las áreas?
- El perímetro de un rectángulo es el triple del de otro rectángulo. ¿Qué relación existe entre los lados de ambos rectángulos? Ejemplificar distintas posibilidades.
- Dos rectángulos tienen el mismo perímetro. Uno de los lados de uno de ellos es 5 cm más largo que el lado correspondiente del otro rectángulo. ¿Qué relación existe entre los otros lados?
- Dos rectángulos tienen el mismo perímetro. Uno de los lados de uno de ellos es el doble del lado correspondiente del otro rectángulo. ¿Qué relación existe entre los otros lados?
- Uno de los lados de un rectángulo se duplica; el otro, se triplica. ¿Qué sucede con el área?
- El área de un cuadrado es 9 veces la de otro cuadrado. ¿Qué relación existe entre los lados de ambos cuadrados? ¿Y entre los perímetros?
- El área de un rectángulo es 6 veces la de otro rectángulo. ¿Qué relación existe entre los lados de ambos rectángulos? Ejemplificar distintas posibilidades.
- El área de un rectángulo es 6 veces la de otro rectángulo. Uno de los lados del primer rectángulo es el triple del lado correspondiente del otro rectángulo. ¿Qué relación existe entre los otros lados?
- Se duplica el radio de una esfera. ¿Qué ocurre con el volumen?
- El radio de un cilindro se duplica; la altura se triplica. ¿Qué ocurre con el volumen?
- El radio de un cilindro se duplica; el volumen permanece constante. ¿Qué ocurre con la altura?
- Dos cilindros tienen el mismo volumen; la altura de uno de ellos es nueve veces la del otro. ¿Qué relación existe entre los radios de ambos cilindros?
- El volumen de un cubo es ocho veces el de otro cubo. ¿Qué relación existe entre las aristas de ambos cubos?
- El volumen de un cono es 4/5 (o el 80 %) del volumen de otro cono; el radio del primer cono es el duplo del radio del segundo cono. ¿Qué relación existe entre las alturas de ambos conos?
- Etc., etc., etc.

Las propuestas anteriores sólo indican estructuras posibles. En función de las características reales de cada grupo de alumnos, el profesor puede:

- contextualizarlas en situaciones concretas
- centrarlas en otras figuras y en otros cuerpos (y no sólo en cuadrados, rectángulos, esferas, cubos y cilindros)
- seleccionar algunas y descartar otras
- decidir en qué orden presentarlas

Hasta aquí, hemos mostrado cómo las fórmulas dan pie al establecimiento de múltiples relaciones.

Pero no se agotan allí sus aplicaciones: también se las puede usar como soporte para efectuar traducciones al lenguaje algebraico (el lenguaje de las letras, del que ya nos ocupamos; ¿lo recuerda?).

Estas traducciones aportan al aprendizaje del álgebra, y lo hacen a través de situaciones significativas.

Por ejemplo: El lado de un cuadrado tiene longitud L (cm). Se lo incrementa en 3 cm. ¿Qué expresión permite calcular el perímetro P (cm) del cuadrado que se obtiene? ¿Y su área A (cm^2)?

La expresión correspondiente al perímetro es $P = 4 . (L + 3)$.

La expresión correspondiente al área, $A = (L + 3) . (L + 3)$

Otro ejemplo (¡más difícil!): Se triplica el radio R de un círculo. ¿Cuál es la expresión del perímetro P y del área A del círculo que se obtiene?

Para el perímetro, $P = 2 . \pi . (3 . R) = 6 . \pi . R$

Para el área, $A = \pi . (3 . R)^2 = 9 . \pi . R^2$

Un tercer ejemplo: La arista de un cubo tiene longitud A (cm). Se la reduce en 1 cm. ¿Cuál es la expresión del volumen V (cm^3) del cubo que se obtiene?

En este caso, $V = (A - 1)^3 = A^3 - 3 . A^2 + 3 . A - 1$

También en el caso de las traducciones, es el profesor quien debe decidir a qué figuras o cuerpos y a qué transformaciones referirlas.

En síntesis: las fórmulas de perímetro, área y volumen no sólo son herramientas para que los alumnos hagan cálculos numéricos; también ofrecen la oportunidad de que establezcan relaciones métricas, y de que efectúen traducciones al lenguaje algebraico. Adecuadamente graduadas, estas aplicaciones no pueden estar ausentes del trabajo cotidiano en el aula.

Capacidad y volumen, ¿dos conceptos en conflicto?

¿Son sinónimos los términos volumen y capacidad?

En principio, no lo son. El término volumen hace referencia a espacio ocupado, y sugiere objetos que reclaman espacio. El término capacidad hace referencia a espacio vacío susceptible de ser llenado, y sugiere recipientes...

Un barril tiene capacidad, que expresa cuánto se puede guardar en él; pero también tiene volumen; éste es algo mayor que aquélla, y habría que considerarlo si se trata de guardar varios barriles en un depósito de dimensiones limitadas.

La capacidad depende del recipiente y de la sustancia por almacenar: una bolsa de arpillera tiene capacidad para almacenar semillas, y no la tiene para almacenar aceite.

La capacidad también depende de la posición del recipiente: la capacidad de un vaso cambia según su inclinación (es máxima cuando está en posición vertical, y es nula cuando está en posición horizontal).

Las relaciones entre volumen y capacidad son complejas.

Las medidas de volumen se utilizan para objetos tridimensionales que permiten medir linealmente cada una de sus dimensiones (la madera que produce un árbol, la tierra que hay que remover para cavar un túnel, el mármol que hay en un bloque).

Las medidas de capacidad se utilizan para indicar la cantidad de líquido que cabe en un barril, en un frasco o en una pileta, y para indicar la cantidad de grano que cabe en una bolsa o en un silo.

Sin embargo, es habitual utilizar medidas de volumen para medir capacidades; es el caso, por ejemplo, del contenido de un frasco de medicamento.

En este escenario, parece conveniente que la escuela ayude a entender ambos conceptos, a reconocer las cualidades físicas en que se basan, a identificarlos (considerarlos idénticos) o a diferenciarlos, según la situación de que se trate.

Para ello, puede ser útil distinguir ideas tales como:

a) el volumen interno de un objeto hueco, que es lo mismo que la capacidad

b) el volumen ocupado, es decir, la cantidad de espacio que ocupa un objeto

c) el volumen desplazado; el volumen de un objeto es equivalente al volumen de líquido que desplaza cuando es sumergido en el líquido (esta idea requiere centrar la atención sobre el volumen del líquido, o sea, sobre el volumen complementario del volumen del objeto).

Diseñar propuestas áulicas alrededor de las tres ideas enumeradas puede contribuir a contrarrestar la tendencia a reducir la noción de “volumen” a la de “volumen interno de una forma hueca”.

Nociones de Estadística y Probabilidad. La estadística

Tres dimensiones para la estadística

A continuación, presentamos tres ítems de estadística correspondientes a cada una de las tres dimensiones de las pruebas.

25

Alrededor del 50% de los chicos de un noveno eligieron un polimodal orientado en ciencias naturales, un 35% se inclinaron por la orientación en sociales y el resto se decidió por arte y diseño. ¿Cuál de los siguientes gráficos permite representar la situación descripta?

Gráfico A

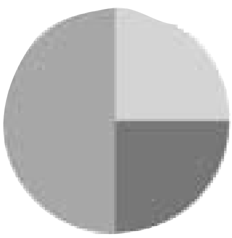


Gráfico B

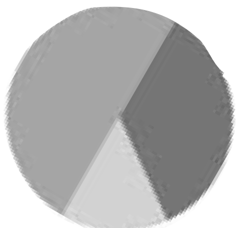


Gráfico C

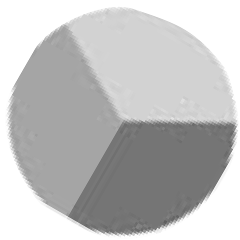
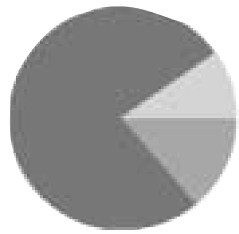


Gráfico D



- El gráfico A. ○ 1
- El gráfico B. ○ 2
- El gráfico C. ○ 3
- El gráfico D. ○ 4

Este ítem, que pertenece al eje Nociones de Estadística y Probabilidad y a la dimensión Estructuras conceptuales, evalúa si el alumno es capaz de reconocer el gráfico circular que corresponde a una distribución porcentual de frecuencias.

¿Cuál es la lógica que subyace a cada distractor?

El distractor 1 responde a la distribución 50 %, 25 %, 25 %. Es decir: una de las frecuencias –la que corresponde a la orientación en ciencias naturales– es correcta; pero la frecuencia complementaria se distribuye en partes iguales entre las otras dos orientaciones. Puede atraer a los alumnos que sólo presten atención al primer dato que aporta el enunciado.

El distractor 3 responde a la distribución $33,\widehat{3}$ %, $33,\widehat{3}$ % y $33,\widehat{3}$ %. Puede tentar a los alumnos que consideren que como los chicos del noveno en cuestión optan entre tres orientaciones, la frecuencia es la misma para las tres.

El distractor 4 responde a la distribución $13,\widehat{8}$ %, $9,7\widehat{2}$ % y $76,3\widehat{8}$ %, que se traduce en ángulos de 50º, 35º y 275º, respectivamente; la amplitud de los dos primeros ángulos es numéricamente igual a las frecuencias porcentuales que el enunciado explicita. Este distractor puede tentar a los alumnos que creen que en un gráfico circular cada sector representa una frecuencia porcentual numéricamente igual a su amplitud. En un gráfico circular, las amplitudes de los distintos sectores son directamente proporcionales a las frecuencias correspondientes, pero la constante de proporcionalidad no es 1 ("a 50 % le corresponden 50º") sino que es 360 / 100 ("a 50 % le corresponden 180º", amplitud que se obtiene haciendo 50 % . 360º / 100 %).

En cuanto al proceso de reconocimiento de la respuesta correcta, una secuencia posible es la siguiente:

- una frecuencia porcentual de 50 % se corresponde con un sector circular de 180º (medio círculo); por lo tanto, las dos opciones posibles son 1 y 2;
- como una frecuencia porcentual de 25 % se representa por un sector circular de 90º, a 35 % le corresponde un sector de más de 90º (así como a 15 %, que resulta de efectuar el cálculo 100 % – (50 % + 35 %), le corresponde un sector de menos de 90º); por lo tanto, la respuesta correcta es 2.

28

Un grupo de 20 compañeros de escuela se reunieron para comer juntos y festejar la primavera. Cada una de las 12 mujeres llevó 4 empanadas y 1 bebida, y cada uno de los varones llevó 2 empanadas y 2 bebidas.

Laura calculó: $\frac{4 + 2}{2}$ y dijo: “Nos corresponden, promediando, exactamente 3 empanadas a cada uno”.

Mauro calculó: $\frac{4 \,.\, 12 + 2 \,.\, 8}{20}$ y dijo: “Si promediamos da 3,2 empanadas para cada uno”.

Emilio está seguro de que el promedio tiene que dar entero, porque cada uno trajo una cantidad entera de empanadas.

¿Quién está en lo correcto?

- Sólo Laura. ○ 1
- Sólo Mauro. ○ 2
- Sólo Emilio. ○ 3
- Tanto Laura como Emilio. ○ 4

Este ítem evalúa si el alumno es capaz de evaluar razonamientos relativos al cálculo de la media aritmética en una situación en la que los datos son números enteros y la media no lo es.

Pertenece al eje Nociones de Estadística y Probabilidad y a la dimensión Procesos cognitivos.

Apunta a relevar un error común: considerar que la media aritmética (comúnmente identificada con el promedio) de una serie de valores enteros también es un número entero. Volveremos sobre este error en las próximas páginas.

El razonamiento de Mauro es incompatible con el de Laura, y también lo es con el de Emilio.

En cambio, el argumento de Emilio es compatible con el cálculo de Laura. Sin embargo, estas dos opciones no son reductibles una a la otra: no se puede afirmar que el razonamiento de Emilio desemboque ineludiblemente en el cálculo de Laura; tampoco se puede asegurar que al cálculo de Laura le subyazga necesariamente un razonamiento como el de Emilio.

29

Sandra quiere saber el promedio de horas diarias que destinó la última semana al deporte. Organizó los datos en una tabla así:

Día	lunes	martes	miércoles	jueves	viernes	sábado	domingo
Horas dedicadas al deporte	2	2	3	–	1	2	–

¿Cuál de los siguientes procedimientos es el correcto para obtener el promedio?

- Sumar todos los valores de la segunda fila y dividir esa suma por 5. ○ 1
- Sumar todos los valores de la segunda fila y dividir esa suma por 7. ○ 2
- Sumar los valores distintos de la segunda fila y dividir esa suma por 3. ○ 3
- Ninguno de ellos. ○ 4

Este ítem evalúa si el alumno es capaz de seleccionar un procedimiento adecuado para calcular promedio a partir de una tabla, en un situación en que el valor cero de la variable considerada tiene frecuencia no nula.

Es un ítem del eje Nociones de Estadística y Probabilidad, y de la dimensión Procedimientos de trabajo.

El distractor 1 propone un procedimiento de cálculo del promedio que omite los casos en que la variable toma valor cero.

El distractor 3 describe un procedimiento que sólo toma en consideración los valores distintos y no nulos de la variable, y que prescinde de sus respectivas frecuencias.

El distractor 4 deja abierta la puerta a otros procedimientos incorrectos.

En las próximas páginas retomaremos algunas de las ideas erróneas que la resolución del ítem puede poner en juego.

Variables didácticas en la construcción y lectura de tablas y gráficos estadísticos

Las tablas y los gráficos estadísticos son habitualmente utilizados en el dominio de otras ciencias para las cuales la Matemática es una herramienta valiosa. También lo son, por ejemplo, en los medios de comunicación. De ahí que un ciudadano alfabetizado matemáticamente no puede ignorarlos.

Ahora bien: en el aula a veces se minimiza y se subestima la complejidad de las tablas y los gráficos estadísticos, y se los enseña como si fueran más simples de lo que en verdad son.

A continuación, identificamos distintos aspectos que confluyen en el grado de dificultad de tablas y gráficos, y que contribuyen a configurarlo:

- En primer lugar, tablas y gráficos subsumen el dato individual en una distribución de frecuencias; es decir, en ellos se "pierden" los valores originales y singulares, que se integran en un agregado de carácter colectivo (una muestra de la población, o toda la población). En este sentido, una tabla o un gráfico suponen un proceso de abstracción y una reducción.

  A diferencia de este primer aspecto, que plantea un grado de dificultad fijo inherente a toda tabla y a todo gráfico estadístico, los aspectos siguientes definen grados de dificultad variables; por esta razón, pueden ser utilizados para diseñar secuencias áulicas o institucionales de enseñanza en las que el tema se vaya presentando con grados crecientes de dificultad:

  - a todos los alumnos de un curso en los distintos momentos del año lectivo,
  - o, en el mismo momento del año, a alumnos del mismo curso con distintas posibilidades de aprendizaje,
  - o en los distintos cursos.

- Otro aspecto que incide en la dificultad de tablas y gráficos es el conocimiento previo del tema (demografía, economía, comercio, industria, etc.) y del contexto (el aula, la propia ciudad, el país, otros países, etc.) al cual se refieren, por parte del alumno.

  Aquellos que estén referidos a temas y/o contextos familiares resultan más fáciles que los que se relacionan con temas y/o contextos menos conocidos.

- En tercer lugar, en la construcción y la lectura de tablas y gráficos pueden intervenir distintos tipos de frecuencias: frecuencia absoluta (número de veces que la variable considerada toma determinado valor), frecuencia acumulada (número de veces que la variable toma valores menores o iguales que determinado valor), frecuencia relativa (cociente entre la frecuencia absoluta de cada valor de la variable, y el número total de individuos), frecuencia porcentual (la frecuencia relativa multiplicada por 100), etc..

  El ítem “de las horas diarias dedicadas al deporte” se basa en una tabla de frecuencias absolutas. El ítem “de las orientaciones polimodales”, en gráficos de frecuencias porcentuales.

  La comprensión de los conceptos numéricos, de las relaciones y de las operaciones que subyacen a una tabla o a un gráfico, también incide en el grado de dificultad que presentan.

- En cuarto lugar, existen diversos modos de organizar la información en tablas, y múltiples tipos de gráficos: de barra, circulares (o de sector o de pastel), pictogramas, etc. No todos ellos presentan para los alumnos el mismo grado de dificultad. Lograr que conozcan esta variedad de formas, que sepan usarla, que sepan leer en cada una de ellas y traducir de una a otra son propósitos que la escuela no puede descuidar.

- Por último: mediante consignas adecuadas, es posible requerir que el alumno ponga en juego distintos niveles de comprensión ante una tabla o un gráfico.

  Curcio[4] describe cuatro niveles de comprensión:

a) Leer los datos: este nivel de comprensión sólo exige una lectura literal de la información; por ejemplo, una lectura de la escala en la que están graduados los ejes de un gráfico cartesiano, o de una de las coordenadas de un punto conociendo la otra.

b) Leer dentro de los datos: requiere interpretar e integrar los datos; por ejemplo: detectar si hay o no proporcionalidad entre las variables en juego.

c) Leer más allá de los datos: requiere realizar predicciones e inferencias a partir de los datos; por ejemplo, a partir de un gráfico que represente la evolución del promedio estacional de lluvias durante los últimos años, predecir dicho promedio para el próximo verano.

d) Leer detrás de los datos: implica evaluar la confiabilidad y la completitud de los datos; por ejemplo, a partir de una tabla que refleja los resultados de una encuesta de opinión, analizar la forma en que fueron recogidos los datos, detectar posibles sesgos, etc.

Volvamos al ítem "de las horas diarias dedicadas al deporte"; la tabla que allí se presenta admite preguntas que promueven los distintos niveles de comprensión:

"*¿Cuántas horas dedicó Sandra al deporte el día miércoles?*" es una pregunta que exige leer (literalmente) los datos de la tabla.

"*En promedio, ¿cuántas horas diarias dedicó Sandra al deporte durante la última semana?*" es una pregunta que requiere leer dentro de los datos, integrándolos. (A este nivel de comprensión apunta el ítem).

"*¿Cuántas horas diarias promedio es esperable que Sandra destine al deporte la próxima semana?*" es una pregunta que exige leer más allá de los datos: la respuesta es predictiva o inferencial.

"*La información que da la tabla, ¿es suficiente para determinar cuántas horas diarias promedio es esperable que Sandra destine al deporte la próxima semana? En caso negativo, ¿qué información adicional se necesita?*" son preguntas que requieren leer detrás de los datos.

Recapitulando: el tema al que se refieren una tabla o un gráfico, el tipo de frecuencia que interviene en ellos, su formato y el nivel de comprensión que requieren son variables didácticas que el docente puede comandar en función de sus objetivos.

---

[4] En Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Para cerrar este apartado, presentaremos tres formatos de gráfico no demasiado habituales: los gráficos de tallo y hojas, los gráficos triangulares y las curvas de concentración.

a) El gráfico de tallo y hojas

Este gráfico, de construcción muy sencilla, permite:

- obtener una representación gráfica de la distribución de los datos, y
- visualizar los valores numéricos de los mismos.

Por ejemplo: la tabla contiene las estaturas (en cm) de los 23 alumnos de un curso:

Estatura (en cm)
161
178
159
176
175
169
162
162
170
170
165
184
163
167
167
160
164
163
175
173
161
163
183

Ordenando las estaturas:

Estatura (en cm)
159
160
161
161
162
162
163
163
163
164
165
167
167
169
170
170
173
175
175
176
178
183
184

Para cada dato, se separan por la izquierda uno o más dígitos (según el número de filas o renglones que se pretende que el gráfico ocupe).

En el ejemplo, separaremos dos dígitos (los del orden de las centenas y de las decenas: 15, 16, 17, 18).

Esos valores se escriben uno debajo del otro, y constituyen el "tallo" del gráfico. A continuación, se buscan los datos que comienzan con cada uno de los valores del tallo; a la derecha de cada valor del tallo, y separadas por un trazo recto, se escriben las cifras de cada uno de los datos que comienza con ese valor; estas cifras forman las “hojas” del gráfico.

El gráfico de tallo y hojas de las estaturas de los 23 alumnos es:

15	9
16	0112233345779
17	0035568
18	34

Subdividiendo o fusionando filas consecutivas, es posible dilatar o comprimir el gráfico.

En el gráfico anterior, las estaturas están agrupadas de 10 cm en 10 cm, formando intervalos que van de 150 cm inclusive a 160 cm exclusive, de 160 cm inclusive a 170 cm exclusive, de 170 cm inclusive a 180 cm exclusive, y de 180 cm inclusive a 190 cm exclusive.

Agrupándolas de 5 cm en 5 cm, el gráfico se transforma en:

15	9
16	011223334
16	5779
17	003
17	5568
18	34

A partir de un gráfico de tallo y hojas se pueden obtener rápidamente los valores mínimo (159 cm) y máximo (184 cm) de la variable, la mediana (167 cm, ya que hay 11 estaturas que no superan los 167 cm, y otras 11 que no bajan de ese valor) y el modo o la moda (163 cm, o sea, el valor más frecuente).

Además, se pueden comparar dos distribuciones. Si en el ejemplo anterior las estaturas correspondieran a varones y mujeres según la siguiente tabla:

Estatura (en cm)
159 (mujer)
160 (mujer)
161 (mujer)
161(varón)
162 (mujer)
162 (mujer)
163 (varón)
163 (mujer)
163 (mujer)
164 (varón)
165 (varón)
167 (mujer)
167 (varón)
169 (mujer)
170 (mujer)
170 (varón)
173 (mujer)
175 (varón)
175 (varón)
176 (varón)
178 (varón)
183 (varón)
184 (varón)

el gráfico de tallo y hojas podría diseñarse de esta manera:

Varones		**Mujeres**
	15	9
431	16	012233
75	16	79
0	17	03
8655	17	
43	18	

A simple vista, el gráfico muestra una tendencia: los varones son más altos que las chicas (obviamente, no en todos los casos, pero tampoco en casos aislados).

b) El gráfico triangular

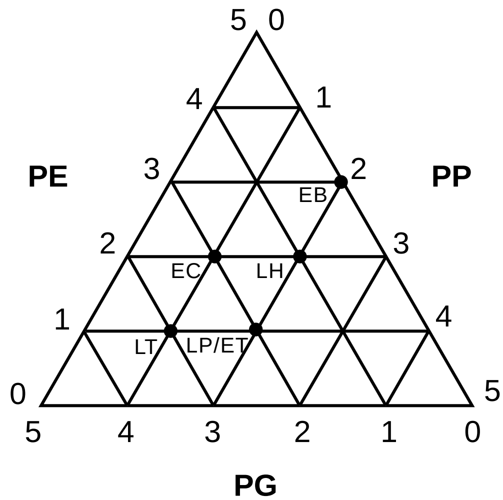
El gráfico triangular se usa para representar una cantidad constante que tiene tres componentes variables. La representación se hace sobre un triángulo equilátero; los lados del triángulo operan como ejes graduados de acuerdo con una escala que va desde 0 hasta el valor que corresponde a aquella cantidad constante.

Por ejemplo, supongamos que cuando cada uno de los 6 equipos de fútbol que disputan un campeonato regional lleva 5 partidos jugados, los resultados son:

Equipo	Número de partidos ganados	Número de partidos empatados	Número de partidos perdidos
Los Tigres	3	1	1
El Ciclón	2	2	1
Los Punteros	2	1	2
El Torpedo	2	1	2
Los Halcones	1	2	2
El Botín	0	3	2

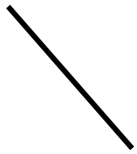
En este caso, la cantidad constante es el número de partidos jugados por cada equipo, o sea, 5, y las tres componentes variables son el número de partidos ganados, el de partidos empatados y el de partidos perdidos.

El gráfico triangular es:



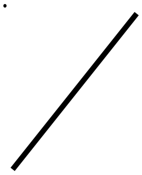
La situación de un equipo queda representada por el punto de intersección de tres rectas, cada una de las cuales es paralela a uno de los lados del triángulo.

Los puntos que corresponden a equipos que llevan el mismo número de partidos ganados quedan alineados en esta dirección:



Los que representan a equipos que llevan el mismo número de partidos empatados se alinean en dirección horizontal.

Y los que corresponden a equipos que llevan el mismo número de partidos perdidos se alinean en esta dirección:



De esta manera, cuanto más a la izquierda y más arriba se encuentra un equipo, mejor es su posición en el campeonato.

Comparando los gráficos correspondientes a fechas distintas del campeonato, se puede apreciar la evolución de cada equipo.

c) La curva de concentración

La curva de concentración (o curva de Lorenz) es un gráfico que se utiliza para mostrar el grado de concentración de la propiedad de cantidades económicas tales como ingresos, riqueza, etc..

Se obtiene representando el valor acumulado de la cantidad económica en juego (por ejemplo, el ingreso acumulado), en función de la frecuencia acumulada de la cantidad de individuos que poseen aquella cantidad económica (en el ejemplo, en función de la proporción de la población que recibe esos ingresos).

Veamos estas ideas en acción. En la ciudad de Los Vientos la población participa del ingreso total individual en la forma que muestra la tabla:

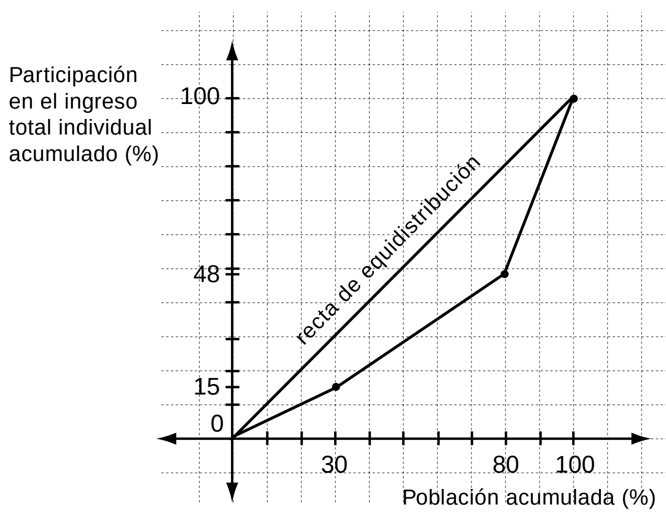
Población (%)		Participación en el ingreso total individual (%)
30	Menor ingreso	15
50		33
20	Mayor ingreso	52

Es decir: el 30 % de la población compuesto por los que menos ingresos tienen reúne el 15 % del ingreso total; mientras que el 20 % de la población compuesto por los que mayores ingresos perciben reúne el 52 % del ingreso total.

Elaborando la tabla de distribuciones acumuladas, resulta:

Población acumulada (%)		Participación en el ingreso total individual acumulada (%)
30	↑ Menor ingreso	15
80		48
100	↓ Mayor ingreso	100

La curva de concentración correspondiente es:



La curva de concentración permite apreciar a simple vista las desigualdades que se presentan en la distribución de los ingresos, tomando como referencia la “recta de equidistribución”, que representa una distribución matemáticamente equitativa.

También permite comparar dos o más distribuciones (correspondientes, por ejemplo, a otras tantas ciudades); para ello, basta con representar las curvas correspondientes sobre un mismo sistema de ejes.

En torno al concepto de media aritmética

Los alumnos suelen tener un contacto temprano con la media aritmética (a la que identifican como promedio).

Ese contacto tiene lugar en la escuela, pero también fuera de ella: la media se utiliza en la vida diaria, está presente en los medios de comunicación, se emplea en múltiples actividades laborales y profesionales.

No obstante, el concepto de media aritmética supone un grado de elaboración lo suficientemente alto como para justificar el análisis de su significado.

Para ello, siguiendo a Batanero (2000), proponemos considerar cinco elementos constitutivos del significado de la media aritmética.

Estos cinco elementos tienen carácter instrumental: pueden ser útiles para llevar a cabo análisis similares sobre otros objetos matemáticos.

En el significado de un objeto matemático cabe identificar:

a. **Elementos extensivos:** el campo de problemas del cual surge el objeto.

b. **Elementos actuativos:** las prácticas empleadas en la resolución de aquellos problemas.

c. **Elementos ostensivos:** las notaciones, los gráficos, las palabras...; en general: las representaciones del objeto.

d. **Elementos validativos:** las demostraciones con las cuales probamos las propiedades del objeto, y los argumentos con que justificamos la resolución de un problema referido al concepto en cuestión.

e. **Elementos intensivos:** las definiciones y propiedades características del objeto, y sus relaciones con otros objetos matemáticos.

Desde el punto de vista didáctico, la comprensión de un concepto no puede reducirse a ninguno de los cinco aspectos enumerados; en particular: no puede reducirse al conocimiento de definiciones y propiedades (elementos intensivos) ni a la habilidad operatoria en el uso de algoritmos de cálculo (elementos actuativos), aunque ambos aspectos son, qué duda cabe, indispensables.

A continuación, analizaremos el significado de la media aritmética en términos de los cinco elementos que lo configuran.

Elementos extensivos

El concepto de media aritmética surge en el contexto de situaciones problemáticas de distinto tipo.

Una clasificación posible (no exhaustiva) de dichas situaciones es:

<table>
<tr><th>Tipo de situación</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>Estimación de una cantidad desconocida en presencia de errores de medición</td><td>Seis chicos pesaron un tornillo con la misma balanza, y obtuvieron los siguientes valores:
9,8 g 9,6 g 9,6 g 9,9 g 9,7 g 9,7 g
Estimar el peso real del tornillo.</td></tr>
<tr><td>Obtención de una cantidad equitativa a repartir para conseguir una distribución uniforme</td><td>✓ Ana llevó a clase 5 chupetines; Flor llevó 3; Nora, 1. ¿Cómo se pueden repartir los chupetines de manera que las tres chicas reciban la misma cantidad?
✓ También son de este tipo las situaciones de renta per cápita, de velocidad media durante un viaje, de calificación final como síntesis de calificaciones parciales, y el ítem "de las empanadas" que ya comentamos</td></tr>
<tr><td>Obtención de un valor representativo de un conjunto de datos cuya distribución es aproximadamente simétrica</td><td>✓ La tabla muestra cuántos segundos tardan diez atletas en recorrer una pista, antes y después de un período de entrenamiento:
<table>
<tr><td>Antes...</td><td>183</td><td>187</td><td>172</td><td>179</td><td>169</td><td>170</td><td>181</td><td>165</td><td>184</td><td>179</td></tr>
<tr><td>Después...</td><td>172</td><td>180</td><td>172</td><td>174</td><td>168</td><td>173</td><td>166</td><td>166</td><td>190</td><td>169</td></tr>
</table>
¿Es efectivo el entrenamiento?
✓ Es de este tipo la comparación entre las estaturas de los varones y las mujeres que sugerimos al tratar el diagrama de tallo y hojas</td></tr>
<tr><td>Identificación del valor que se obtendrá con más probabilidad al tomar un elemento al azar de una población</td><td>El ingreso mensual medio de los empleados públicos de una provincia es de $ 425. Se han elegido siete de ellos al azar; los ingresos mensuales de seis de los siete son $ 380, $ 395, $ 430, $ 450, $ 600, $ 410. ¿Cuál es el ingreso mensual esperado –o más probable– del séptimo empleado? (En situaciones como ésta, se toma la media aritmética con carácter predictivo).</td></tr>
<tr><td>Construcción de un conjunto de datos que tenga una media aritmética dada</td><td>Una lata de arvejas dice: "Peso neto: 400 g". Construir una distribución hipotética del peso de cien de esas latas de arvejas. (Obviamente, los 400 g indicados en cada lata deben interpretarse como peso promedio).</td></tr>
</table>

Reconocer los problemas relacionados con la media aritmética es tan importante como conocer la definición de este concepto estadístico y saber calcularlo.

Elementos actuativos

Si bien el cálculo de la media parece sencillo, son múltiples los errores que los alumnos suelen cometer al ejecutarlo.

Por ejemplo:

- Usar la media simple en lugar de la media ponderada, es decir, no tomar en consideración las frecuencias correspondientes a cada valor de la variable.

  Es lo que hace Laura en el ítem "de las empanadas": promedia 4 y 2, sin tomar en cuenta que son doce las personas que llevaron 4 empanadas cada una, y ocho las que llevaron 2.

El mismo error comete el alumno que en el ítem "de las horas dedicadas al deporte" selecciona el distractor 3.

- Hallar la media de los valores de la frecuencia en lugar de hallar la de los valores de la variable.

  Por ejemplo, en la distribución de edades de los alumnos que cursan Noveno Año en una escuela:

Edad (en años)	Frecuencia
13	10
14	16
15	10
16	8

  promediar 10, 16, 10 y 8 en lugar de promediar 13, 14, 15 y 16.

  Este error es más común cuando los valores de la variable son del mismo orden que los de la frecuencia.

- No tomar en cuenta los casos en que la variable asume valor cero.

  Incurre en este error el alumno que en el ítem "de las horas dedicadas al deporte" opta por el distractor 1.

Es necesario “provocar” estos errores en el aula, ponerlos sobre el tapete, para discutir sobre ellos y apuntar a superarlos.

Elementos ostensivos y validativos

Profesores y alumnos utilizamos la palabra “promedio”, o la denominación “media aritmética”. Sin embargo, no necesariamente queremos decir lo mismo.

Por ejemplo, hay alumnos que atribuyen a estas expresiones el significado de “valor más frecuente” (confundiendo la media aritmética con la moda).

Otros las interpretan como “valor razonable”, que es su significado coloquial.

O como “punto medio”, identificando media con mediana.

O como “algoritmo”, restringiendo el significado de la media a un procedimiento de cálculo.

Enseñar el concepto de media aritmética implica ir más allá de la palabra, acercando los significados intuitivos que le otorgan los alumnos al significado estadístico del término. Para ello, es imprescindible sondear e indagar tales significados intuitivos, solicitando sinónimos, argumentos y razones de lo que los estudiantes dicen y hacen.

Elementos intensivos

Algunas de las propiedades características de la media aritmética son:

1) La media aritmética está comprendida entre los valores extremos de la distribución.

Una situación que pone en juego esta propiedad, y que vale la pena discutir con los alumnos, es: Los 10 varones de Noveno juntaron dinero para comprarles regalos a sus 10 compañeras. Carlos, que fue el que menos dinero pudo aportar, participó con $ 2; Roberto, el que más aportó, participó con $ 5. Los 10 regalos que compraron costaron lo mismo. ¿Es posible que cada regalo haya costado $ 1,50? ¿Y $ 6?

2) La suma de las diferencias entre cada valor de la distribución y la media aritmética (en ese orden) es cero.

Una situación para analizar con los alumnos: Para contar con dinero durante el viaje de egresados, cada chico de Noveno llevó cierta suma. Con la intención de que todos tuvieran la misma cantidad, algunos repartieron parte del importe que habían llevado, y otros recibieron dinero. ¿Es posible que el importe total repartido por los primeros sea distinto del importe total recibido por los últimos?

3) La media aritmética no responde a la propiedad asociativa.

Para discutir con los alumnos: Durante el mes de abril, Leonor obtuvo dos calificaciones en Matemática: 7 y 9; en mayo, sacó un 2. ¿Cuál de los siguientes procedimientos es adecuado para calcular el promedio de las tres notas?

Procedimiento I: Sumar 7 y 9; dividir la suma por 2; sumarle 2 al cociente; dividir esta suma por 2.

Procedimiento II: Sumar 7, 9 y 2, y dividir la suma por 3.

¿En qué casos ambos procedimientos dan el mismo resultado?

4) La media aritmética puede no coincidir con ninguno de los valores promediados.

Un ejemplo para el análisis: El sueldo promedio de los empleados de una empresa es de $ 520. Esta información, ¿permite asegurar que la mayoría de los empleados gana $ 520? ¿y que al menos uno gana ese salario?

5) La media aritmética puede ser un número que no tenga sentido en el contexto de los datos con los que se calcula.

Es interesante discutir con los alumnos el significado de expresiones tales como “el número promedio de hijos por familia en la ciudad es de 1,8”.

6) Los valores nulos de la variable intervienen en el cálculo de la media aritmética, e inciden en su valor. En otras palabras: el cero no actúa como elemento neutro.

Ya hemos ejemplificado los alcances y las consecuencias de esta propiedad.

7) La media aritmética es representativa de los valores promediados.

> Volvamos a la situación “de los atletas”: para decidir si el entrenamiento es efectivo o no, hay que comparar dos medias aritméticas[5], la del tiempo empleado en recorrer la pista antes del entrenamiento, y la del tiempo empleado en hacerlo después de entrenar; cada una de ellas representa o resume un conjunto de datos; una estrategia incorrecta pero usual de comparación consiste en hacer inferencias a partir de datos aislados (por ejemplo, juzgar como muy efectivo el entrenamiento porque uno de los atletas tardó 10 segundos menos en recorrer la pista después de entrenar; o considerarlo como no efectivo porque otro de los atletas tardó lo mismo antes de entrenar que después de hacerlo).

En síntesis: la alternativa a una enseñanza de la media aritmética centrada en la aplicación de fórmulas para el cálculo mecánico, consiste en problematizar el concepto movilizándolo en distintas situaciones y en contextos variados, en considerar simultánea o sucesivamente sus diversos aspectos y propiedades, y en procurar que los alumnos tomen conciencia de las limitaciones y los errores que a veces subyacen a sus concepciones informales.

[5] También es necesario considerar las respectivas dispersiones.

Bibliografía consultada y recomendada

- Alsina Catalá, C.; Burgués Flamarich, C; Fortuny Aymemmi, J. M. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría.* Madrid, Síntesis, 1995.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Grupo de Investigación en Educación Estadística, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

  - (2000). "Significado y comprensión de las medidas de posición central". En: *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 25. Barcelona.
- Batanero, C.; Estepa, A.; Godino, J. D. (1991). "Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria". En: *Suma,* 9.
- Bressan, A. M.; Bogisic, B.; Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la educación básica. Mirar, construir, decir y pensar...* Buenos Aires / México, Novedades Educativas.
- Castro Martínez, Encarnación; Castro Martínez, Enrique; Rico Romero, L.; Segovia Alex, I. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Madrid, Síntesis.
- Chamorro Plaza, M. del C.; Belmonte Gómez, J. M. (1991). *El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales.* Madrid, Síntesis, 1994.
- Dickson, L.; Brown, M.; Gibson, O. (1984). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona, Ministerio de Educación y Ciencia / Labor, 1991.
- Espinel Febles, M. C.; Bruno Castañeda, A.; García Cruz, J. A. (1995). "Diagramas para visualizar desigualdades y clasificaciones". En: *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 5, Julio. Barcelona.
- Grupo Azarquiel (1993). *Ideas y actividades para enseñar Álgebra.* Madrid, Síntesis.
- Guibert, A.; Lebeaume, J.; Mousset, R (1993). *Actividades geométricas para Educación Infantil y Primaria.* Madrid, Narcea.
- Mason, M. *The Van Hiele Levels of Geometric Understanding.* http://www.mcdougallittell.com/math/txmath/gfa.htm
- Moliner, M. (1967). *Diccionario de uso del español.* Madrid, Gredos, 1997.
- Olmo, M. Á. Del; Moreno Carretero, M. F.; Gil Cuadra, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid, Síntesis.
- Parra, C.; Saiz, I. (Compiladoras) (1994). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Buenos Aires, Paidós.
- PROMEC. SENOC (1985). *Curso de Física.* Buenos Aires.
- Socas Robayna, M. M.; Camacho Machín, M.; Palarea Medina, M. M.; Hernández Domínguez, J. (1996). *Iniciación al álgebra.* Madrid, Síntesis.
- Tormo Ferrer, C. (1995). "Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética". En: *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 5, Julio. Barcelona.
- *The Van Hiele Model of Geometric Thinking.* http://www.math.ecu.edu/~hunting/VanHiele.html
- *The Van Hiele Theory*. http://nunic.nu.edu/~frosamon/history/mike.html

La Plata, diciembre de 2001

Los documentos que corresponden al Área de Matemática son tres:

1. Las pruebas de Matemática. ***Marco referencial***

Este documento consta de tres capítulos destinados a exponer el marco referencial de las pruebas de Matemática de séptimo y noveno año tomadas en el contexto del Programa de Evaluación de la Calidad Educativa de la Provincia de Buenos Aires. En el primer capítulo ("Revisando mitos"), se caracteriza el enfoque didáctico al cual responde la evaluación, en respuesta a las preguntas acerca de qué transformar en el Área, y en qué dirección hacerlo. El segundo ("Invitación a hacerse problemas") trata de una de las estrategias prioritarias del Área: la resolución de situaciones problemáticas. El tercero ("Y entonces, ¿qué evalúan las pruebas de Matemática?"), explicita las decisiones relativas a la perspectiva evaluativa adoptada y describe la organización interna de las pruebas.

2.Del aula a las pruebas y de las pruebas al aula.
Doce nudos para la reflexión

Este documento se organiza a partir de doce temas (de carácter matemático o pedagógico) potencialmente conflictivos. Los doce nudos responden al cruce de los cuatro ejes curriculares del Área de Matemática en la Provincia de Buenos Aires (Números y Operaciones, Nociones geométricas, Mediciones, Nociones de Estadística y Probabilidad) con las tres dimensiones seleccionadas para construir las evaluaciones (Estructuras conceptuales, Procesos cognitivos, Procedimientos de trabajo).

3. Informe de resultados. ***Operativo 2001***

Este documento presenta los resultados de las pruebas tomadas en el año 2001 en el Área de Matemática. Para ello, procura identificar los logros y las dificultades de los estudiantes de séptimo año en la resolución de las pruebas, y analiza algunos ítems particulares que estadísticamente presentaron mayores o menores grados de dificultad relativa.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires
Dirección Provincial de Planeamiento y Evaluación de la Calidad Educativa